

FREIDO POR INMERSION PROFUNDA: MODELADO Y ANALISIS MATEMATICO DE LA DINAMICA INICIAL

Luis T. VILLA SARAVIA⁽¹⁾

RESUMEN: El modelado y estudio del complejo proceso de freído de papa natural por inmersión profunda en aceite caliente (150-180°C), requiere considerar como primer período o etapa temporal en la evolución del mismo (Etapa 1) al precalentamiento de la porción, inmediatamente luego de su inmersión. Esto es, previo a la ocurrencia de vaporización de humedad.

Se entiende que la duración de tal Etapa viene dada por el tiempo t_1 necesario para que la temperatura superficial de contacto papa-aceite, alcance los 100°C.

En este trabajo se modela la referida Etapa y obtiene una aproximación oportuna para tiempos pequeños, de la función representativa del perfil de temperatura de la porción de papa. Como consecuencia se deriva una estima para t_1 , con resultados sobre dependencia respecto de los parámetros cuyo rol se juzga como prioritarios en la evolución del proceso. Así también se efectúa un análisis de sensibilidad (según Landau) para t_1 frente a parámetros importantes y datos del proceso.

ABSTRACT: The corresponding análisis in order to modeling the complex immersion frying process for natural potato in hot oil (150-180°C), requires to consider as a first temporal stage along the process (Stage 1), the preheating of the potato sample so soon as it is immersed. That is before the occurrence of moisture vaporization.

The temporal evolution for such stage is given by the time t_1 which is necessary in order that an external interfacial potato-oil temperature of 100°C is reached.

In this paper, such stage is modeled and solved, to obtain the temperature profile inside the potato sample and then, the corresponding estimation for t_1 .

Also, a sensibility analysis (in the sense of Landau) for t_1 upon some important physical parameters and data for the process is presented.

Palabras Claves: Freido por inmersión profunda, modelos predictivos.

Key Words: Deep fat frying, predictive models.

INTRODUCCIÓN

En el ámbito de la Industria de Alimentos, con particular referencia a los procesos de cocción rápida, en los últimos tiempos se está dedicando un importante esfuerzo a la investigación del correspondiente al freido de papa (y otros alimentos similares) por inmersión profunda en un líquido caliente, tal como aceite o grasa comestibles en un rango de temperatura del orden de 150 a 180°C.

(1) Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Salta. Instituto de Investigaciones para la Industria Química (INIQUI), Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Consejo de Investigación de la Universidad de Salta (CIUNSa). Buenos Aires 177 (4400) Salta, Argentina

Al tratarse de un alimento sabroso y de importante aporte energético, complementado con un precio relativamente bajo en contraste con otros, el consumo de papa frita va en expansión en gran parte del mundo, incluido nuestro país.

El proceso de freido en sí es extremadamente complejo, implicando transferencia simultánea de calor y materia, cambios químicos y estructurales con eventual expansión o contracción de volumen.

Como consecuencia, en la actualidad se dista mucho de poseer un conocimiento razonablemente profundo y detallado de las diversas facetas involucradas en el fenómeno como por ejemplo los mecanismos de transporte comprometidos en la pérdida de humedad y absorción de aceite, parámetros y etapas controlantes, mecanismos cinéticos, génesis y desarrollo de la corteza, etc.

Desde el punto de vista práctico o de interés industrial concreto, es procedente pensar que entre otras, interesan cuestiones atinentes a la papa frita en cuanto a su aptitud y aceptabilidad para el consumo humano: palatabilidad, gusto, crocancia, textura, aspecto (pardeamiento), tasa de aceite absorbido y las eventuales relaciones con los costos emergentes.

De lo consignado se infiere que hay sobradas razones que sustentan el interés en investigar el tema motivo de la presentación.

Hasta hace pocos años, el conocimiento sobre el proceso en cuestión se limitaba esencialmente a aspectos empíricos y semiempíricos del mismo. Entre los primeros trabajos de investigación que abordan ya la formulación y resolución numérica de modelos descriptivos de naturaleza predictiva para el freido por inmersión, cabe citar a los de Farkas *et al.* (1994,1996).

Los modelos de Farkas *et al.* (*op.cit.*), constituyen problemas de frontera libre para ecuaciones parabólicas acopladas de conducción de calor y transferencia de materia. Para un panorama sobre el tema, se pueden por ejemplo ver los siguientes trabajos mencionados en la bibliografía: Aguilera (1997), Farkas *et al.* (1996), Farid *et al.* (1998), Farid (2001), Krokida *et al.* (2000), Vitrac *et al.* (2002), Yamsaengsung *et al.* (2002).

DESARROLLO

Tipo de dominio sólido considerado

Como tal se considera una rodaja de papa natural de magnitudes geométricas tales de que sea razonable considerar una sola dirección espacial (habida cuenta de la estructura interna de la papa en relación a direcciones preferenciales para los transporte de calor y materia). Se trata esencialmente de una rodaja de espesor pequeño frente a otras dimensiones características (por ejemplo del orden de 1 a 2 cm. para el espesor y 10 cm. de largo).

En la Fig. 1 siguiente, se ilustra el tipo de dominio contemplado:

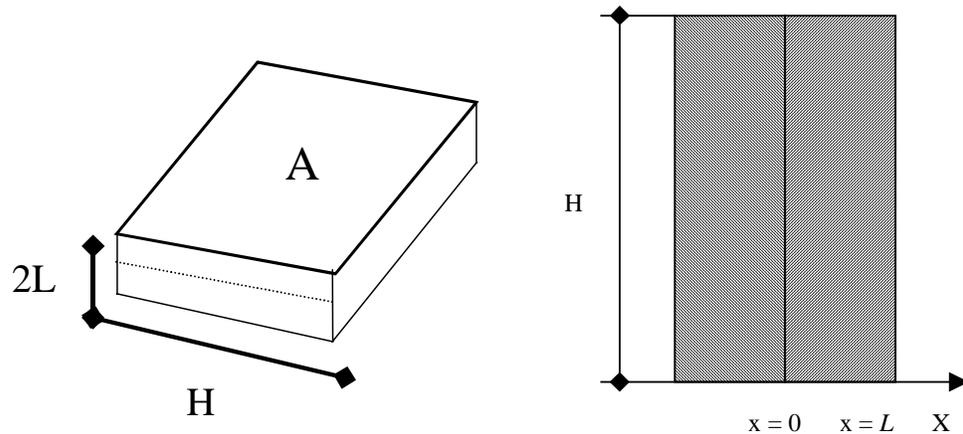


Fig. 1: Representación esquemática del sólido en freído

En términos matemáticos, este tipo de dominio se conoce como unidimensional infinito (infinite slab en inglés).

Hipótesis generales usadas

- (H₀) En esta Etapa 1, no se contempla la ocurrencia de flujo de aceite hacia el interior del bastón de papa.
- (H₁) Las propiedades, parámetros materiales y de transporte de energía y materia se mantienen constantes.
- (H₂) Todos los flujos de materia y energía son ortogonales a la superficie principal de la rodaja.
- (H₃) Vale la Ley de Fourier para conducción de calor y la de Fick para la difusión.
- (H₄) La materia prima a procesar (rodajas de papa natural) se considera de composición homogénea y a temperatura uniforme T_0 .
- (H₅) No se contempla la eventual ocurrencia de encogimiento de las rodajas por efecto del proceso.

Modelo Descriptivo de la Etapa 1 (Precalentamiento)

Se trata únicamente de un problema de contorno e inicial para la ecuación del calor por conducción en la rodaja como región con frontera fija, esto es:

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < t_1 \quad (1)$$

$$k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = h [T_b - T(L, t)], \quad 0 < t < t_1, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad 0 < t < t_1, \quad (3)$$

$$T(x, 0) = T_0, \quad 0 \leq x \leq L \quad (4)$$

Como es sabido, la ecuación (1) surge de un balance de energía en una porción de la rodaja.

La ecuación (2) expresa la transferencia de calor en la superficie $x = L$ de área A . Se supone que en el seno del aceite, a cierta distancia de las rodajas, la temperatura (bulk) T_b del mismo es constante.

La ecuación (3) expresa una condición natural de simetría en el centro de la rodaja al suponerse con razón de que esta se calienta simétricamente respecto del plano central. La ecuación (4) expresa la condición inicial para el perfil de temperatura de la rodaja de papa, la que se supone uniforme de valor T_0 .

En la Tabla 1 siguiente se reportan datos sobre propiedades físicas y parámetros de transporte térmicos a usar en los modelos, (se hace referencia a una variedad de papa adecuada para el freído).

Tabla 1

Propiedad	Valor estimado	Fuente
ρ	1085 kg/m ³	[Lamberg & Hallstrom, 1986]
C_{ps}	3610 J/kg°C	[Lamberg & Hallstrom, 1986]
k	0.655 W/m°C	[Arifin, 1993]
D	4×10^{-8} m ² /s	[Saravacos y Charm, 1992]
h	750 W/m ² °C	[Lamberg & Hallstrom, 1986]
$\alpha = \frac{k}{\rho \cdot C_{ps}}$	0.167×10^{-6} m ² /s	[Lamberg & Hallstrom, 1986]

RESULTADOS

Denotando con $W(x, p)$ a la transformada de Laplace respecto de la variable t de la función incógnita $T = T(x, t)$ de (1)-(4), se encuentra rápidamente que:

$$W(x, p) = \frac{T_0}{p} + \frac{(T_b - T_0) \operatorname{Ch} \left(\sqrt{\frac{p}{\alpha^2}} x \right)}{p \left[a\sqrt{p} \operatorname{Sh} \left(\sqrt{\frac{p}{\alpha^2}} L \right) + \operatorname{Ch} \left(\sqrt{\frac{p}{\alpha^2}} L \right) \right]} \quad (5)$$

donde con p se denota a la variable de la transformada de Laplace y el parámetro a viene dado como:

$$a = \frac{k}{h} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad (6)$$

Definiendo el parámetro b y la variable q asociada a la de Laplace p como:

$$b = \frac{1}{a\sqrt{\alpha}}, \quad q = \sqrt{\frac{p}{\alpha}} \quad (7)$$

la función $W(x, p)$ dada por (5) toma la forma:

$$W(x, p) = \frac{T_0}{p} + b(T_b - T_0) \frac{(e^{-q(L-x)} + e^{-q(L+x)})}{p[(b+q) + (b-q)e^{-2qL}]} \quad (8)$$

A los fines de abordar la transformada inversa de Laplace de la función $W(x, p)$ expresada por (8) conviene hacer previamente la siguiente consideración sobre parte de la estructura de la misma: al respecto, sea $g = g(q)$ la función definida por:

$$g(q) = \frac{1}{b+q + (b-q)e^{-2qL}} \quad (9)$$

que viene a representar uno de los factores del denominador del segundo término del segundo miembro de (8).

Un breve manipuleo sobre $g(q)$ permite escribirla como serie convergente, en efecto:

$$g(q) = \frac{1}{(b+q) \left[1 + \frac{b-q}{b+q} e^{-2qL} \right]} \quad (10)$$

Recordando que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad \text{con } |r| < 1$$

e interesando en el caso en análisis tener en particular que $q > 0$, si para r se define:

$$r = \frac{b-q}{b+q} \cdot e^{-2qL} \quad (11)$$

se cumple naturalmente la condición $|r| < 1$ (téngase presente que al ser el parámetro a dado por (6), positivo por su significancia física, también el parámetro b será positivo como se infiere de su definición dada por (7)).

Entonces, resulta válida la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{1 + \frac{b-q}{b+q} e^{-2qL}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n \cdot \left(\frac{b-q}{b+q} \right)^n e^{-2qLn} \right] \quad (12)$$

es decir,

$$\frac{1}{1 + \frac{b-q}{b+q} e^{-2qL}} = 1 - \frac{b-q}{b+q} e^{-2qL} + \frac{(b-q)^2}{(b+q)^2} e^{-4qL} - \frac{(b-q)^3}{(b+q)^3} e^{-6qL} + \dots$$

En consecuencia, la función $g(q)$ se puede expresar como:

$$g(q) = \frac{1}{b+q} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n \cdot \left(\frac{b-q}{b+q} \right)^n e^{-2qLn} \right] = \frac{1}{b+q} - \frac{(b-q)}{(b+q)} e^{-2qL} + \frac{(b-q)^2}{(b+q)^3} e^{-4qL} - \frac{(b-q)^3}{(b+q)^4} e^{-6qL} + \dots$$

Correspondientemente, ahora la función $W(x, p)$ da por (8) se puede expresar como:

$$W(x, p) = \frac{T_0}{p} + b(T_b - T_0) \left[\frac{e^{-q(L-x)} + e^{-q(L+x)}}{p(b+q)} - \frac{(b-q)}{p(b+q)^2} \cdot (e^{-q(3L-x)} + e^{-q(3L+x)}) + \frac{(b-q)^2}{p(b+q)^3} (e^{-q(5L-x)} + e^{-q(5L+x)}) - \frac{(b-q)^3}{p(b+q)^4} (e^{-q(7L-x)} + e^{-q(7L+x)}) + \dots \right] \quad (13)$$

En vista de la característica dinámica del proceso cuya primera etapa (de corta duración frente a la etapa principal del freído de la rodaja) es modelada por el problema de contorno e inicial dado por las ecuaciones (1)-(4) cuya solución en el campo de la transformada de Laplace viene dada por la función $W(x, p)$ de la ecuación (13), y por otra parte teniendo en cuenta lo establecido por el Teorema del Valor Inicial, respecto del comportamiento asintótico temporal de la función $T(x, t)$ transformada inversa de Laplace de $W(x, p)$, para tiempos pequeños, a modo de una aproximación inicial razonable es procedente truncar la serie dada por (13) en pocos términos (nótese que converge rápidamente a cero al crecer q).

Así, al truncar en el segundo término tenemos:

$$W^0(x, p) = \frac{T_0}{p} + b(T_b - T_0) \left[\frac{e^{-q(L-x)}}{p(b+q)} + \frac{e^{-q(L+x)}}{p(b+q)} \right] \quad (14)$$

La transformada inversa de Laplace de $W^0(x, p)$, denotada por $T^0(x, t)$ resulta ser:

$$T^0(x, t) = T_0 + (T_b - T_0) \left\{ \operatorname{erfc} \left(\frac{L-x}{2\sqrt{\alpha t}} \right) - \exp \left[b(L-x) + \alpha b^2 t \right] \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{L-x}{2\sqrt{\alpha t}} + b\sqrt{\alpha t} \right) \right. \\ \left. + \operatorname{erfc} \left(\frac{L+x}{2\sqrt{\alpha t}} \right) - \exp \left[b(L+x) + \alpha b^2 t \right] \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{L+x}{2\sqrt{\alpha t}} + b\sqrt{\alpha t} \right) \right\}$$

o mejor aún:

$$T^0(x, t) = T_0 + (T_b - T_0) \left\{ \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{L-x}{2\sqrt{\alpha t}} \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{L+x}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \right] \right. \\ \left. - e^{\alpha b^2 t} \left[e^{b(L-x)} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{L-x}{2\sqrt{\alpha t}} + b\sqrt{\alpha t} \right) + e^{b(L+x)} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{L+x}{2\sqrt{\alpha t}} + b\sqrt{\alpha t} \right) \right] \right\} \quad (15)$$

Notemos que $T^0(x, t)$ dada por (15) verifica la condición:

$$\lim_{t \rightarrow 0} T(x, t) = T_0 \quad (16)$$

lo que ratifica a tal función como una buena candidata a ser una razonable aproximación de $T(x, t)$ solución del modelo (1)-(4) en análisis, para tiempos pequeños.

Entonces, en base a la expresión dada por (15) abordaremos un análisis tendiente a obtener:

- (a) Dependencia de t_1 con parámetros del proceso.
 (b) Estima de t_1 para un proceso de freído evolucionando en condiciones típicas.

Recordamos que con t_1 se denota al tiempo que le lleva a la rodaja desarrollar la Etapa de precalentamiento, esto significa precisamente el tiempo necesario para que la superficie ($x = L$) en contacto con el aceite, alcance la temperatura de ebullición del agua.

(a)

De evaluar $T^0(x,t)$ sobre la superficie de la rodaja ($x = L$) se tiene:

$$T^0(L,t) = T_0 + (T_b - T_0) \left\{ 2 - \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{\rho C_{ps}}{kt}} L \right) - \exp \left(-\frac{h^2}{\rho C_{ps} k} t \right) \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{h}{\sqrt{k \rho C_{ps}}} \sqrt{t} \right) + \exp \left(2 \frac{h}{k} L \right) \left(1 - \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{\rho C_{ps}}{kt}} L + \frac{h}{\sqrt{\rho C_{ps} k}} \sqrt{t} \right) \right) \right] \right\} \quad (17)$$

Influencia del Coeficiente de Transferencia h

De la expresión (17) se infiere que para tiempos pequeños $\frac{\partial T^0}{\partial h}(L,t)$ se puede considerar como dada aproximadamente por:

$$\frac{\partial T^0}{\partial h}(L,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (T_b - T_0) \left[\sqrt{\frac{t}{\rho C_{ps} k}} \left(1 + \exp \left(\frac{2h}{k} L + \frac{h^2}{\rho C_{ps} k} t - \left(\sqrt{\frac{\rho C_{ps}}{k}} L + \frac{h}{\sqrt{\rho C_{ps} k}} \sqrt{t} \right)^2 \right) \right) \right] \quad (18)$$

Donde se han despreciado términos que tienden a cero cuando la variable independiente t tiende a cero, con el mismo orden que t o mas rápido aún.

De (18) se sigue que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial T^0}{\partial h}(L,t) = 0 \quad , \quad \frac{\partial T^0}{\partial h}(L,t) > 0 \quad (19)$$

Como conclusión, a partir de (18) y (19) surge lo siguiente sobre la influencia del coeficiente de transferencia h en el comportamiento dinámico de la temperatura superficial aproximada $T^0(L, t)$ de la rodaja:

- La temperatura alcanzada para un dado t es mayor mientras mayor es h (esta es una consecuencia naturalmente esperada).
- En el instante inicial hay poca sensibilidad de $T^0(L, t)$ a un cambio de h .

De la primera conclusión obviamente se desprende que al aumentar h disminuye el valor t_1 .

Influencia del espesor L de la rodaja

Con un razonamiento análogo al precedente, se encuentra que para tiempos pequeños se puede escribir:

$$\frac{\partial T^0}{\partial L}(L, t) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}(T_b - T_0) \cdot \sqrt{\frac{\rho C_{ps}}{kt}} e^{-\frac{\rho C_{ps} L^2}{k t}} \quad (20)$$

expresión de la que surge que para dado t , la temperatura superficial de la rodaja será menor mientras mayor sea el espesor. También se tiene baja sensibilidad inicial de $T^0(L, t)$ frente a cambios de L .

Influencia de la conductividad térmica k de la papa

Trabajando sobre la expresión de $T^0(L, t)$ provista por la ecuación (17), se encuentra que para tiempos pequeños resulta

$$\frac{\partial T^0}{\partial k}(L, t) = -\frac{h}{\sqrt{\pi}}(T_b - T_0) \cdot \sqrt{\frac{t}{\rho C_{ps}}} \cdot \frac{1}{k^{3/2}}; \quad (21)$$

de lo cual se infiere que un aumento en la conductividad trae aparejado un aumento en t_1 que es el tiempo necesario para que la superficie de la lámina alcance la temperatura de 100°C.

Lo precedente a su vez permite observar que uno de los efectos del pretratamiento de la materia prima (básicamente consistente en sacar algún porcentaje de humedad a la misma), al operarse una disminución de la conductividad al bajar el porcentaje de humedad, conlleva a una disminución en el valor de t_1 , lo que es un aspecto positivo sobre el costo del proceso.

Influencia del calor específico C_{ps} de la papa

Ahora a partir de (17) para tiempos pequeños resulta:

$$\frac{\partial T^0}{\partial C_{ps}}(L, t) = -\frac{(T_b - T_0)}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\sqrt{\frac{\rho}{kC_{ps}}} L e^{-\frac{\rho C_{ps}}{k} \cdot \frac{L^2}{t}} + \frac{h}{\sqrt{\rho k}} \cdot \frac{\sqrt{t}}{C_{ps}^{3/2}} \right) \quad (22)$$

de donde se concluye como era natural de esperar que un aumento en el calor específico de la lámina conlleva un aumento en el valor del tiempo t_1 necesario para que la misma alcance una temperatura superficial de 100°C, durante la etapa de precalentamiento en el proceso de freído.

A partir de la estructura de (17) sigue la monotonía estricta con T_b , de $T^0_{(L,t)}$ y t_1 , creciente y decreciente respectivamente, como era natural esperar.

En lo referente a comparación de órdenes de dependencia del tiempo t_1 con los parámetros h , k , L , C_{ps} , T_b , a partir de (17)-(22) se trabaja con los límites para la variable independiente tiempo tendiendo a cero, de los respectivos cocientes de derivadas. Así se obtiene:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\partial T_0}{\partial h}(L, t)}{\frac{\partial T_0}{\partial L}(L, t)} = +\infty, \quad (23)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\partial T_0}{\partial k}(L, t)}{\frac{\partial T_0}{\partial h}(L, t)} = cte, \quad (24)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\partial T_0}{\partial C_{ps}}(L, t)}{\frac{\partial T_0}{\partial k}(L, t)} = cte, \quad (25)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\partial T_0}{\partial T_b}(L, t)}{\frac{\partial T_0}{\partial k}(L, t)} = +\infty, \quad (26)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\partial T_0}{\partial T_b}(L, t)}{\frac{\partial T_0}{\partial h}(L, t)} = +\infty, \quad (27)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\partial T_0}{\partial T_b}(L, t)}{\frac{\partial T_0}{\partial L}(L, t)} = +\infty, \quad (28)$$

expresiones estas, de las que se infiere el siguiente orden comparativo sobre el grado de dependencia de $T_0(L, t)$ y por ende de t_1 con los respectivos pares de parámetros:

- (h, L) : Mayor dependencia con h
- (h, k) : Grado equivalente de dependencia
- (h, C_{ps}) : Grado equivalente de dependencia
- (T_b, k) : Mayor dependencia con T_b
- (T_b, h) : Mayor dependencia con T_b
- (T_b, L) : Mayor dependencia con T_b

En vista de tales órdenes comparativos, es claro de que se puede consignar el siguiente tamizado de parámetros con referencia a la importancia del rol de los mismos sobre el comportamiento dinámico inicial del proceso de freído:

-Parámetro más importante: T_b (la temperatura del baño de aceite).

-Parámetros de importancia equivalente: h, k, C_{ps} (coeficiente de transferencia de calor-aceite-papa, conductividad térmica y calor específico de la papa, respectivamente).

La información precedente será de utilidad al momento de formular el modelo descriptivo de la Etapa siguiente en el proceso de freído. Por ejemplo, si procede a realizar algunas simplificaciones del Modelo vía un análisis de órdenes de magnitud entre diversos términos intervinientes en el mismo.

(b)

Aplicando la ecuación (17), surge que el valor t_1 del tiempo necesario para que la superficie de la lámina de papa alcance la temperatura de 100°C , debe buscarse como solución de la siguiente ecuación trascendente:

$$f(t, \text{parámetros}) = 2 - \frac{100 - T_0}{T_b - T_0} \quad (29)$$

donde $f(t, \text{parámetros})$ viene dada como:

$$f(t) = \operatorname{erf}\left(\frac{P_0}{\sqrt{t}}\right) + e^{P_1 t} \left\langle 1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{P_1} \sqrt{t}\right) + e^{2P_2} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{P_0}{\sqrt{t}} + \sqrt{P_1} \sqrt{t}\right) \right] \right\rangle, \quad (30)$$

con los parámetros P_0 , P_1 y P_2 dados por:

$$P_0 = \sqrt{\frac{\rho C_{ps}}{k}} L; P_1 = \frac{h^2}{k \rho C_{ps}}; P_2 = \frac{h}{k} L, \quad (31)$$

Comportamiento de $f(t)$

Un análisis efectuado sobre la expresión dada por (30), permite concluir que la función $f = f(t)$ verifica las siguientes propiedades:

- (i) $f(0) = 2$
- (ii) $f(t) > 0, \forall t \geq 0$
- (iii) f es monótona decreciente

En consecuencia, está asegurada la existencia de un único $t_1 > 0$ tal que se satisface la ecuación (29) para dados T_0 y T_b ($T_b > T_0$). Nótese que el segundo miembro de (29) verifica la desigualdad:

$$1 < 2 - \frac{100 - T_0}{T_b - T_0} < 2 \quad (32)$$

Estima de t_1

Se consideró un proceso de freído de una lámina de papa de semiespesor $L = 0.01$ m a una temperatura inicial $T_0 = 25^\circ\text{C}$, en un aceite caliente a temperatura bulk $T_b = 170^\circ\text{C}$.

Entonces, se resolvió la ecuación (29) tomando para los parámetros térmicos, materiales y de transporte k , C_{ps} , ρ , h los valores consignados en la Tabla 1 reportados en fuentes existentes en la bibliografía disponible sobre el tema. Usando tales valores resultan los siguientes para los valores de los parámetros P_0 , P_1 y P_2 ya definidos oportunamente por (31):

$$P_0 = 24 \text{ s}^{1/2}, P_1 = 0.22 \text{ s}^{-1}, P_2 = 11 \quad (33)$$

Se obtuvo el siguiente valor como estima para t_1 :

$$t_1 \cong 10 \text{ s} \quad (34)$$

Obsérvese que la constante del segundo miembro de la ecuación (29) toma el valor de 1.48. Farkas *et al.* (1996) reportan un valor del orden de 10 seg. para t_1 , emergente de observaciones experimentales efectuadas en el comienzo del proceso.

Cabe destacar que para resolver la ecuación (29) se usó una técnica no clásica implementada por el autor de la presente, consistente en generar un problema de valor inicial (PVI) para una ecuación diferencial ordinaria de primer orden asociada a la citada ecuación.

En efecto, para la función f de la mencionada ecuación, definida por la expresión (30), se genera el siguiente (PVI):

$$\begin{cases} \frac{df}{dt} = g(t, \text{parámetros}), t > 0 \\ f(0) = 2 \end{cases} \quad (35)$$

donde la función $g(t, \text{parámetros})$ viene dada como:

$$\begin{aligned} g(t, \text{parámetros}) = & \frac{P_0}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-P_0/t}}{t^{3/2}} - e^{P_1 t} \left\{ \sqrt{\frac{P_1}{\pi}} \frac{e^{-P_1 t}}{\sqrt{t}} + e^{2P_2} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \left(\sqrt{P_1} - \frac{P_0}{t} \right) \right] e^{-\left(\frac{P_0}{\sqrt{t}} + \sqrt{P_1 t}\right)^2} \right\} + \\ & + P_1 e^{P_1 t} \left\{ 1 - \text{erf}(\sqrt{P_1 t}) + e^{2P_2} \left[1 - \text{erf}\left(\frac{P_0}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{P_1 t}\right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (36)$$

siendo P_0, P_1, P_2 los parámetros definidos por (31).

La solución del PVI (35) obtenida mediante el uso de un simulador computacional de probada eficiencia, como el Simnon - an Interactive Simulation Program for Nonlinear Systems. Versión 1.00, se exhibe en la Fig. 2 siguiente:

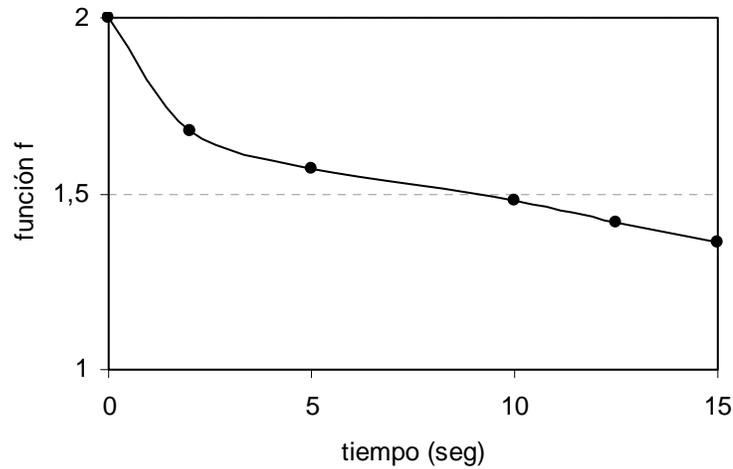


Fig. 2: Gráfica de la solución del PVI (2.35)

En primer lugar se puede ratificar observando la Fig. 2 de que el comportamiento dinámico de f está en un todo de acuerdo por lo previsto en el estudio analítico oportunamente explicitado precedentemente.

Como puede comprobarse en la figura, f alcanza el valor 1.48 para $t = 10$ s aproximadamente.

Perfil de temperatura de la lámina luego de transcurrido el tiempo $t_1 = 10$ s

Naturalmente nos referimos a un perfil para un proceso evolucionando en correspondencia con los datos dados por (33) para P_0, P_1, P_2 y

$$T_0 = 25^\circ\text{C} \quad , \quad T_b = 170^\circ\text{C} \quad , \quad L = 0.01 \text{ m}, \quad (37)$$

que fueron los usados para estimar $t_1 = 10$ s .

Entonces, a partir de la expresión (15) de $T_{(x,t)}$, evaluada para $x = \lambda L$ ($0 \leq \lambda \leq 1$), $t = 10$ s, considerando un conjunto discreto de valores para λ , se obtiene un conjunto de valores de la temperatura de la rodaja alcanzados para $t = 10$ s, desde el plano de simetría central ($x = 0$) hasta la superficie $x = L$. Para tal conjunto de valores se busca la expresión analítica de una oportuna función de ajuste. Denotando como $Q(x)$ a la citada función de ajuste, de realizar los cálculos se obtuvo:

$$Q(x) = 2 \cdot 10^8 x^3 - 10^6 x^2 + 3645,4 \cdot x + 20,334 \quad 0 \leq x \leq L \quad (38)$$

La gráfica de $Q(x)$ se exhibe en la Fig. 3 siguiente:

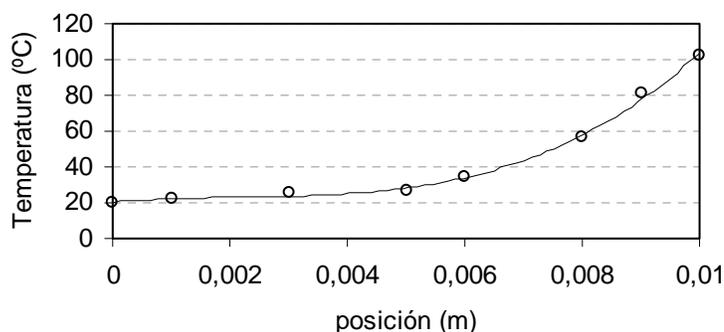


Fig. 3: Representación gráfica del perfil inicial de temperatura

La función $Q(x)$ obtenida, dada por (38) está destinada a tomarse como perfil inicial de temperatura en la etapa modelada siguiente a la inicial de precalentamiento en un proceso de freído evolucionando bajo idénticas condiciones a las presupuestas para estimar $t_1 = 10s$.

CONCLUSIONES

La evolución de la primera etapa en el proceso de freído de papa natural por inmersión profunda en aceite caliente, ha sido modelada a través de un problema de contorno e inicial para la ecuación del calor.

A partir de una expresión que provee una aproximación a la solución del modelo formulado, se pudo estimar analíticamente el tiempo t_1 de precalentamiento de la rodaja de papa, habiendo un buen acuerdo con el orden del valor de t_1 reportado en la bibliografía pertinente sobre el proceso analizado. Así también, se obtiene el perfil inicial de temperatura para la etapa subsiguiente en el freído y un análisis de sensibilidad de t_1 frente a parámetros del proceso.

RECONOCIMIENTOS

El autor expresa su agradecimiento al Consejo de Investigación de la Universidad Nacional de Salta (CIUNSa), a la Facultad de Ingeniería de la citada Universidad, y al Instituto de Investigaciones para la Industria Química (INIQUI) con dependencia del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).

NOMENCLATURA

- a, b : parámetros definidos por (6) y (7).
- C_{ps} : calor específico de la papa (J/kg.°C).
- f : función definida por (30).
- g : función definida por (36).
- h : coeficiente de transferencia de calor (W/m²°C).
- k : conductividad térmica (W/m°C).
- L : longitud característica de la porción de papa procesada
- p : variable de la transformada de Laplace.
- P_0, P_1, P_2 : parámetros dados por (33).
- q : variable definida por (7).
- Q : función definida por (38).
- r : variable definida por (11).
- t : variable tiempo (s).
- T_0 : perfil inicial de temperatura uniforme de la rodaja.
- T_b : temperatura del baño de aceite (°C).
- W : función definida por (8).
- x : variable espacial (m).

Subíndices:

- ₀: condición inicial.

Letras griegas:

- α : difusividad térmica en la papa (m²/s).
- ρ : densidad de la papa (kg/m³).

BIBLIOGRAFÍA

- AGUILERA, J.M., 1996. *Fritura de alimentos. Temas en tecnología de alimentos*. Vol. 1. Cap.5. CYTED. Instituto Politécnico Nacional, México.
- ARFIN, B.B., 1993. Measurement of thermal conductivity using a modified differential scanning calorimeter, Ph. D. Thesis, University of California, Davis.
- FARKAS, B.E.; R.P. SINGH y T.R. RUMSEY, 1996. Modelling heat and mass transfer in immersion frying. I. Model development. II. Model solution and verification. *J. Food Engng.*, 29: 211-226 and 227-248 respectively.
- FARID, M.M. y X.D. CHEN, 1998. The analysis of heat and mass transfer during frying of food using a moving boundary solution procedure. *Heat and Mass Transfer*, 34: 69-77.
- FARID, M.M., 2001. A unified approach to the heat and mass transfer in melting, solidification, frying and drying processes. *Chem. Engng. Science*, 56: 5419-5427.
- KROKIDA, M.K.; V. OREOPOULOU y Z.B. MAROULIS, 2000. Water loss and oil uptake as a function of frying time. *J. Food Engng.*, 44 (1): 39-46.

-
- LAMBERG, I. y B. HALLSTRÖM, 1986. Thermal properties of potatoes and a computer simulation model of a blanching process. *J. Food Technol.*, 21: 577-585.
- SARAVACOS, G.D. y S.E. CHARM, 1992. A study of the mechanism of fruit and vegetable de hydration. *Food Technology*, 1: 78-81.
- VITRAC, O.; D. DUFOUR; G. TRYSTRAM y Anne-Lucie RAOULT-WACK, 2002. Characterization of heat and mass transfer during deep-fat frying and its effect on cassava chip quality. *J. Food Engng.*, 53 (2): 161-176.
- YAMSAENGSUNG, R. y R.G. MOREIRA, 2002. Modeling the transport phenomena and structural changes during deep fat frying. Part I: Model development. Part II: Model solution & validation. *J. Food Engng.*, 53 (1): 1-10 and 11-25 respectively.

Recibido/Received/: 01-nov-04
Aceptado/Accepted/: 29-dic-04