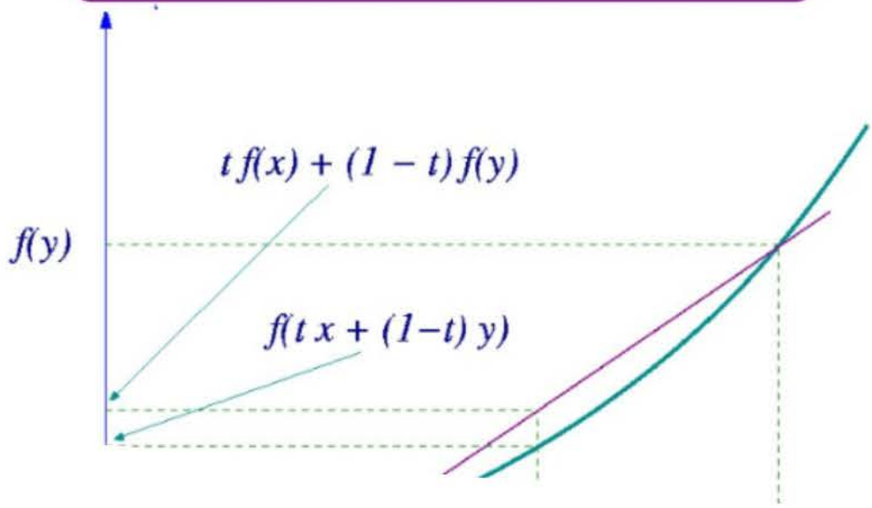
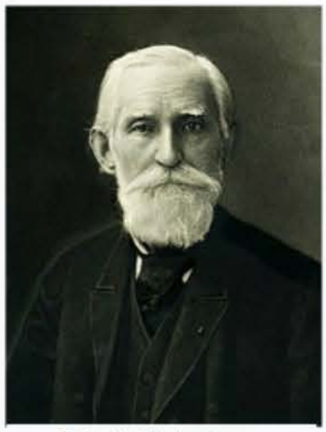
$$\left(\int_a^b |f+g|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$$



Charles Hermite (1822-1901)

Jacques Hadamard (1865-1963)



Pafnuty Chebyshev

Ludwig Otto Hölder

CURSO DE POSGRADO - RES. N° 621/23CD

DESIGUALDADES INTEGRALES. RESULTADOS CLÁSICOS Y DESARROLLOS ACTUALES

INFORMACIÓN AMPLIADA

Tipo de actividad: Curso de posgrado.

Denominación: Desigualdades Integrales. Resultados clásicos y desarrollos actuales. (Resolución N° 621/23).

Destinatarios: Dirigido a profesores, investigadores y personas interesadas en la investigación matemática, de diversas universidades e instituciones y graduados universitarios y de nivel superior no universitario de 4 años de duración como mínimo.

Carga horaria: 60 horas.

Fecha de inicio del curso: 29/09/2023

Inscripción: Abierta hasta el 25 de septiembre del 2023 en SIU GUARANI.

Cupos: Mínimo 5 personas – Máximo 25

Modalidad: 10 encuentros presenciales de 4 horas cada uno y 5 encuentros no presenciales de la misma duración.

Fundamentación

Es bien conocido el papel significativo de las desigualdades en el desarrollo y evolución de las Matemáticas. Algunas nociones básicas relacionadas con ellas ya estaban en uso por los antiguos griegos, es bien conocido el Problema de Dido, probablemente el primer problema isoperimétrico en la Historia de las Matemáticas. Sin embargo, las desigualdades no se emplearon ni en aritmética ni en ningún otro tipo de manipulación de números (ver [10]). La formalización de la Teoría Matemática de las Desigualdades se inicia esencialmente en el siglo XVIII con los estudios realizados por Gauss. Fue continuado por Cauchy y Chebyshev, quienes tuvieron la idea de aplicar algunas desigualdades al Análisis Matemático.

Posteriormente, el matemático ruso Bunyakovsky demostró, en 1859, la conocida desigualdad de Cauchy-Schwarz para el caso de las dimensiones infinitas.

Asimismo, la investigación realizada por Hardy sobre este tema debe ser reconocida como particularmente significativa, ya que fue más allá de las desigualdades particulares. Hardy logró reunir a los mejores matemáticos del momento para resolver problemas relacionados con las desigualdades. Además, fundó el Journal of the London Mathematical Society, una revista especialmente indicada para publicar trabajos sobre desigualdades. Junto con renombrados matemáticos como Littlewood y Polya, desarrolló el famoso volumen titulado "Desigualdades" ([22]), que fue la primera monografía sobre este tema.

El libro se convirtió en un hito en el campo de las desigualdades, y logró el objetivo de dar estructura, sistematización y formalización a un conjunto aparentemente aislado de resultados, y con ello, los transformó en una teoría. En la actualidad, las desigualdades han alcanzado un destacado desarrollo teórico y aplicado y son la base metodológica de procesos de aproximación, estimación, acotación, interpolación, etc. En general, son fundamentales en todo problema de modelización, de ahí la significación que han alcanzado en los últimos 40 años.

En particular, la atención se ha centrado sobre todo, en aquellas vinculadas a la noción de función convexa, provocando un continuo proceso de ramificación de la definición clásica, lo que hace prácticamente imposible el dominio del estado actual. Recomendamos que los lectores consulten el trabajo [43] donde se presenta una visión bastante general, hasta el 2020, de las diversas nociones, extensiones y generalizaciones de dicho concepto.

Como dijimos, uno de los conceptos más atractivos en Ciencias Matemáticas es el de función convexa, presente hoy en múltiples áreas matemáticas desde la Optimización hasta la Teoría de Funciones y centro de posiblemente el núcleo más fructífero en el estudio de las desigualdades integrales, como veremos más adelante. Comencemos introduciendo el concepto de función convexa de la siguiente manera.

En lo que sigue, [a,b] es un intervalo real, cerrado y acotado. Se dice que una función $f:[a,b] \subseteq R \to R$ es convexa en el intervalo [a,b], si se cumple la desigualdad

$$f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)$$

con $t \in [0,1]$. Decimos que f es cóncava si -f es convexa.

En la clase de funciones convexas, definidas sobre el intervalo [a,b], la siguiente desigualdad es, probablemente, la más conocida:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \qquad (1)$$

llamada la Desigualdad de Hermite-Hadamard. Esta fue publicada por Hermite en 1883 e, independientemente, por Hadamard en 1893 (ver [21] y [23]).

La trascendencia de la misma, radica en sus profundas imbricaciones con conocidos resultados del Análisis clásico. Estamos diciendo que el valor medio integral de una función convexa, interpola la imagen del punto medio del intervalo [a,b] y el valor medio de las imágenes de los extremos del intervalo. Asimismo, podemos afirmar el acotamiento de dicho valor medio, es decir, dicho valor medio se encuentra en el intervalo

$$\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right), \frac{f(a)+f(b)}{2}\right].$$

La proliferación de resultados asociados con esta desigualdad (1), se ha dado, fundamentalmente en cuatro direcciones:

1) Con nuevas nociones de convexidad.

2) Utilizando diferentes operadores integrales.

3) Definiendo funcionales, que permitan obtener nuevos estimados de los miembros derechos e izquierdo de (1).

4) Utilizando una malla más refinada, es decir, en lugar de considerar solo a y b, tomar otros nodos en el intervalo.

En cada una de esas direcciones de trabajo, hemos obtenido diversos resultados que van a ser sumarizados en el curso.

Contenidos

- Unidad 1. Desigualdades Integrales clásicas: Desigualdades que no involucran la noción de convexidad: Desigualdad de Hölder. Desigualdad de potencia media (power-mean). Desigualdad de Minkowski. Desigualdad de Chebyshev. Desigualdad de Grüss. Desigualdad de Wirtinger. Desigualdades que utilizan la noción de convexidad: Desigualdad de Simpson. Desigualdad de Jensen (Jensen-Mercer). Desigualdad de Hermite-Hadamard.
- Unidad 2. Desigualdades Integrales auxiliares. Desigualdad de Hölder. Desigualdad de potencia media (power-mean). Desigualdad de Minkowski. Primeras extensiones y generalizaciones. Aplicaciones.

- Unidad 3. Desigualdades Integrales que involucran productos de integrales. Desigualdad de Chebyshev. Desigualdad de Grüss. Primeras extensiones y generalizaciones. Aplicaciones.
- Unidad 4. Desigualdades Integrales que involucran derivadas. Desigualdad de Wirtinger. Desigualdad de Simpson. Aplicaciones.
- Unidad 5. Función convexa. Definición clásica. Definición para funciones derivables. Primeras extensiones y generalizaciones. Definiciones no estándares. Trabajos de Kalinin. Otras definiciones.
- Unidad 6. Desigualdades Integrales que utilizan la noción de convexidad. Desigualdades del tipo Hermite-Hadamard y Hermite-Hadamard-Mercer.
- Unidad 7. Desigualdades en otros marcos. El caso del Cálculo Fractal. El q-Cálculo.

Objetivos

- Conocer los principales avances matemáticos en el campo de las Desigualdades Integrales.
- Valorar la importancia de las desigualdades integrales en la Matemática actual.
- Investigar sobre diversas posibilidades de generalizaciones y extensiones de resultados conocidos de la literatura.

Metodología de enseñanza

El curso puede ser dividido en cuatro grandes partes.

En la primera (Unidad 1) se consideran las desigualdades en el contexto clásico del Análisis Matemático, sus demostraciones e ideas originales.

En la segunda parte (Unidades 2, 3 y 4) se tratarán desigualdades que no involucran la noción de función convexa, aunque veremos algunos desarrollos, por ejemplo, de la Desigualdad de Simpson, que en ocasiones si lo hacen.

En la tercera parte (Unidades 5 y 6) se estudiará la noción de función convexa y algunas de sus múltiples extensiones y generalizaciones y las desigualdades integrales más conocidas que hacen uso de ella.

En la cuarta parte (Unidad 7) se presentarán algunos resultados muy recientes en otros cálculos: el fractal y el q-cálculo de Jackson.

En cada encuentro, el equipo docente trabajará en el tema en cuestión, ya sea el panorama histórico de la construcción de un área de las matemáticas o la evolución de un determinado problema o concepto matemático general, y a continuación se procederá a discutir un texto, realizando un análisis crítico del mismo. Se analizarán además en esta parte de la clase las estrategias de investigación utilizadas en diversos resultados conocidos de la literatura. Cada tema tratado incluirá preguntas que orientará el estudio de los asistentes.

En las últimas clases se espera dedicar un espacio para la discusión de los temas posibles de investigación.

Instancias de evaluación y aprobación

El curso está basado en las siguientes actividades:

- Clases presenciales.
- Actividades no presenciales individuales y/o grupales (propuestas de actividades por parte del equipo docente).

Requisitos de aprobación del curso

El asistente deberá presentar una breve idea sobre la investigación a realizar y primeros avances del mismo.

El trabajo puede ser aceptado, rechazado, o devuelto para correcciones. En caso de ser aceptado, habrá un breve coloquio sobre el mismo para decidir la aprobación o no de la materia.

Equipo Docente:

Coordinador: Dr. Juan E. Nápoles Valdes

Docente Responsable: Prof. Dr. Juan E. Nápoles Valdes

Docente Auxiliar: Prof. Dr. Paulo M. Guzmán

Bibliografía básica

[1] Latifa Agamalieva, Yusif S. Gasimov, Juan E. Nápoles-Valdes, On a generalization of the Wirtinger inequality and some its applications, Stud. Univ. Babe¸s-Bolyai Math. 68(2023), No. 2, 237–247 DOI: 10.24193/subbmath.2023.2.01

[2] B. Bayraktar, S. Butt, Sh. Shaokat, J. E. Nápoles Valdés, New Hadamard-type inequalities via (s,m1,m2)-convex functions, Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika, Komp'yuternye Nauki, vol. 31, issue 4, 2021, pp. 597-612.

[3] Bahtiyar Bayraktar, Péter Kórus, Juan Eduardo Nápoles Valdés, Some New Jensen–Mercer Type Integral Inequalities via Fractional Operators, Axioms 2023, 12, 517. https://doi.org/10.3390/axioms12060517

[4] B. Bayraktar, J. E. Nápoles Valdes, NEW GENERALIZED INTEGRAL INEQUALITIES VIA (H,M)-CONVEX MODIFIED FUNCTIONS, Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta, 2022 Volume 60, 3-15

[5] Bahtiyar Bayraktar, Juan E. Nápoles Valdés, Integral inequalities for mappings whose derivatives are (h,m,s)-convex modified of second type via Katugampola integrals, Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series, Volume 49(2), 2022, Pages 371-383, DOI: 10.52846/ami.v49i2.1596

[6] B. Bayraktar, J. E. Nápoles V., F. Rabossi, ON GENERALIZATIONS OF INTEGRAL INEQUALITIES, Probl. Anal. Issues Anal. Vol. 11 (29), No 2, 2022, pp. 3-23 3 DOI: 10.15393/j3.art.2022.11190

[7] Bahtiyar Bayraktar, Juan E. Nápoles Valdés, Hermite-Hadamard weighted integral inequalities for (h,m)-convex modified functions, Fractional Differential Calculus, Volume 12, Number 2 (2022), 235-248 dx.doi.org/10.7153/fdc-2022-12-15

[8] S. Bermudo, P. Kórus, Juan E. Nápoles, On q-Hermite-Hadamard inequalities for general convex functions, Acta Math. Hungar. 162, 2020, 364-374.

[9] M. Bohner, A. Kashuri, P. O. Mohammed, J. E. Nápoles V., Hermite-Hadamard-type Inequalities for Integrals arising in Conformable Fractional Calculus, Hacet. J. Math. Stat. Volume 51 (3), 2022, 775-786 DOI:10.15672/hujms.946069

[10] A. M. Fink, An Essay on the History of Inequalities, J. Math. Anal. Appl. 2000, 249, 118-134.

[11] J. D. Galeano Delgado, J. Lloreda, J. E. Nápoles V., E. Pérez Reyes, CERTAIN INTEGRAL INEQUALITIES OF HERMITE-HADAMARD TYPE FOR H-CONVEX FUNCTIONS, Journal of Mathematical Control Science and Applications Vol. 7 No. 2 (July-December), 2021, 129-140

[12] Juan Galeano Delgado, Juan E. Nápoles Valdés, Edgardo Pérez Reyes, Miguel Vivas-Cortez, The Minkowski Inequality for Generalized Fractional Integrals, Appl. Math. Inf. Sci. 15, No. 1, 1-7 (2021) http://dx.doi.org/10.18576/amis/150101

[13] Juan Galeano Delgado, Juan E. Nápoles Valdés, Edgardo Pérez Reyes, A note on some integral inequalities in a generalized framework, Int. J. Appl. Math. Stat.; Vol. 60; Issue No. 1; Year 2021, 45-52

[14] Juan Gabriel GALEANO DELGADO, Juan E. NÁPOLES VALDÉS, Edgardo PÉREZ REYES, SEVERAL INTEGRAL INEQUALITIES FOR GENERALIZED RIEMANN-LIOUVILLE FRACTIONAL OPERATORS, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat. Volume 70, Number 1, Pages 269-278 (2021) DOI: 10.31801/cfsuasmas.771172

[15] Juan Gabriel Galeano Delgado, Juan E. Nápoles Valdés, Edgardo Pérez Reyes, New Hermite-Hadamard inequalities in the framework of generalized fractional integrals, Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series, Volume 48(2), 2021, Pages 319-327.

[16] Juan Gabriel GALEANO DELGADO, Juan Eduardo NÁPOLES VALDÉS, Edgardo PÉREZ REYES, Concerning the generalized Hermite-Hadamard integral inequality, Sigma J Eng Nat Sci, Vol. 41, No. 2, pp. 226−231, April, 2023 DOI: 10.14744/sigma.2023.00034

[17] Yusif S. Gasimov, Juan Eduardo Nápoles Valdés, SOME REFINEMENTS OF HERMITE–HADAMARD INEQUALITY USING k–FRACTIONAL CAPUTO DERIVATIVES, Fractional Differential Calculus, Volume 12, Number 2 (2022), 209-221 doi:10.7153/fdc-2022-12-13

[18] Paulo M. Guzmán, Péter Kórus, Juan E. Nápoles Valdés, Generalized Integral Inequalities of Chebyshev Type, Fractal Fract. 2020, 4, 10; doi:10.3390/fractalfract4020010

[19] Paulo M. Guzmán, Juan E. Nápoles Valdes, Generalized fractional Grüss-type inequalities, Contrib. Math. 2 (2020) 16-21 DOI: 10.47443/cm.2020.0029

[20] P. M. Guzmán, J. E. Nápoles V., Y. S. Gasimov, INTEGRAL INEQUALITIES WITHIN THE FRAMEWORK OF GENERALIZED FRACTIONAL INTEGRALS, Fractional Differential Calculus, Volume 11, Number 1 (2021), 69-84 doi:10.7153/fdc-2021-11-05

[21] J. Hadamard, Étude sur les propriétés des fonctions entiéres et en particulier d'une fonction considérée par Riemann, J. Math. Pures App. 9, 1893, 171-216.

[22] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, Inequalities; Cambridge University Press: Cambridge, UK, 1934.

[23] C. Hermite, Sur deux limites d'une intégrale définie, Mathesis 3, 82 (1883).

[24] A. Kashuri, M. A. Ali, J. E. Nápoles, Z. Zhang, Fractional non conformable Hermite-Hadamard inequalities for generalized φ-convex functions, Fasciculi Mathematici, Nr 64 2020, 5-16 DOI: 10.21008/j.0044-4413.2020.0007.

[25] Artion Kashuri, Juan E. Nápoles Valdés, Muhammad Aamir Ali, Ghulam Muhayy Ud Din, New Integral Inequalities Using Quasi-Convex Functions Via Generalized Integral Operators And Their Applications, Applied Mathematics E-Notes, 22, 2022, 221-231

[26] P. Kórus, L. M. Lugo, J. E. Nápoles Valdés, Integral inequalities in a generalized context, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 57 (3), 312-320 (2020)

[27] Péter Kórus, Juan E. Nápoles Valdés, q-Hermite–Hadamard inequalities for functions with convex or h-convex q-derivative, Mathematical Inequalities & Applications, Volume 25, Number 2 (2022), 601-610 doi:10.7153/mia-2022-25-36

[28] P. Kórus, J. E. Nápoles Valdés, On some integral inequalities for (h,m)-convex functions in a generalized framework, Carpathian Journal of Mathematics, to appear.

[29] S. Mehmood, J. E. Nápoles Valdés, N. Fatima, B. Shahid, Some New Inequalities Using Conformable Fractional Integral of Order β, Journal of Mathematical Extension Vol. 15, SI-NTFCA, (2021) (33)1-22 URL: https://doi.org/10.30495/JME.SI.2021.2184

[30] S. Mehmood, J. E. Nápoles Valdés, N. Fatima, W. Aslam, Some integral inequalities via fractional derivatives, Adv. Studies: Euro-Tbilisi Math. J. 15(3): 2022, 31-44 (September). DOI: 10.32513/asetmj/19322008222

[31] Sikander Mehmood, Mariam Shahzad, Kiran Batool, Nawal Fatima, Juan E. Nápoles Valdés, Some Integral Inequalities in the Framework of Conformable Fractional Integral, Journal of Prime Research in Mathematics, 17(2) (2021), 159-167

[32] Juan E. Nápoles Valdés, SOME INTEGRAL INEQUALITIES IN THE FRAMEWORK OF GENERALIZED K-PROPORTIONAL FRACTIONAL INTEGRAL OPERATORS WITH GENERAL KERNEL, Honam Mathematical J. 43 (2021), No. 4, pp. 587-596 https://doi.org/10.5831/HMJ.2021.43.4.587}[33] Juan E. Nápoles Valdés, On the Hermite-Hadamard type inequalities involving generalized integrals, Contrib. Math. 5, 2022, 45-51 DOI: 10.47443/cm.2022.020

[34] Juan E. Nápoles Valdes, A Review of Hermite-Hadamard Inequality, Partners Universal International Research Journal (PUIRJ), Volume: 01 Issue: 04 | October-December 2022, 98-101 DOI:10.5281/zenodo.7492608

[35] J. E. Nápoles Valdés, Bahtiyar Bayraktar, On The Generalized Inequalities Of The Hermite-Hadamard Type, Filomat 35:14, 2021, 4917-4924 https://doi.org/10.2298/FIL2114917N

[36] Juan E. Nápoles, Bahtiyar Bayraktar, New extensions of Hermite-Hadamard inequality using k−fractional Caputo derivatives, Advanced Studies: Euro-Tbilisi Mathematical Journal 16(2) (2023), pp. 11–27. DOI: 10.32513/asetmj/193220082314

[37] J. E. Nápoles Valdés, Bahtiyar Bayraktar, Saad Ihsan Butt, New integral inequalities of Hermite-Hadamard type in a generalized context, Punjab University Journal of Mathematics 53(11), 2021, 765-777 https://doi.org/10.52280/pujm.2021.531101

[38] J. E. Nápoles, M. N. Quevedo Cubillos, B. Bayraktar, INTEGRAL INEQUALITIES OF SIMPSON TYPE VIA WEIGHTED INTEGRALS, Probl. Anal. Issues Anal. Vol. 12 (30), No 2, 2023, pp. 68-86 DOI: 10.15393/j3.art.2023.13310

[39] Juan E. Nápoles Valdés, Florencia Rabossi, A note on Chebyshev inequality via k-generalized fractional integrals, Electron. J. Math. 1 (2021) 41-51 DOI: 10.47443/ejm.2021.0004

[40] Juan E. Nápoles Valdés, Florencia Rabossi, Generalized fractional operators and inequalities integrals, in Bipan Hazarika, Santanu Acharjee, H. M. Srivastava (eds.), Advances in Mathematical Analysis and its Applications, Chapman and Hall/CRC, New York, 2022 https://doi.org/10.1201/9781003330868

[41] Juan E. Nápoles Valdés, Florencia Rabossi, A note on some fractional integral inequalities via generalized fractional integral, An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Mat. (N.S.), Tomul LXVIII, 2022, f. 1, 79-89 https://doi.org/10.47743/anstim.2022.00006

[42] J. E. Nápoles Valdés, Florencia Rabossi, Hijaz Ahmad, INEQUALITIES OF THE HERMITE-HADAMARD TYPE, FOR FUNCTIONS (H,M)-CONVEX MODIFIED OF THE SECOND TYPE, Commun. Combin., Cryptogr. & Computer Sci., 1, 2021, 33-43

[43] J. E. Nápoles Valdes, F. Rabossi, A. D. Samaniego, CONVEX FUNCTIONS: ARIADNE'S THREAD OR CHARLOTTE'S SPIDERWEB?, Advanced Mathematical Models & Applications Vol.5, No.2, 2020, pp.176-191

[44] J. E. Nápoles Valdes, J. M. Rodríguez, J. M. Sigarreta, New Hermite-Hadamard Type Inequalities Involving Non-Conformable Integral Operators, Symmetry 11, 2019, 1108; doi:10.3390/sym11091108

[45] M. Vivas-Cortez, S. Kermausuor, J. E. Nápoles Valdés, Hermite–Hadamard Type Inequalities for Coordinated Quasi-Convex Functions via Generalized Fractional Integrals, in P. Debnath et al. (eds.), Fixed Point Theory and Fractional Calculus: Recent Advances and Applications, Forum for

Interdisciplinary Mathematics, 2022, Springer Nature Singapore Pte Ltd. https://doi.org/10.1007/978-981-19-0668-8 16

[46] M. Vivas-Cortez, P. Kórus, Juan E. Nápoles Valdés, Some generalized Hermite-Hadamard-Fejér inequality for convex functions, Advances in Difference Equations 2021:199 https://doi.org/10.1186/s13662-021-03351-7

[47] Miguel Vivas-Cortez, Francisco Martínez, Juan E. Nápoles Valdes, Jorge E. Hernández, On Opial-type inequality for a generalized fractional integral operator, Demonstratio Mathematica 2022; 55: 695–709

[48] M. Vivas-Cortez, Juan E. Nápoles Valdés, J. A. Guerrero, Some Hermite-Hadamad Weighted Integral Inequalities for (hm)-Convex Modified Functions, Appl. Math. Inf. Sc 16 No. 1, 2022, 25-33 http://dx.doi.org/10.18576/amis/160103