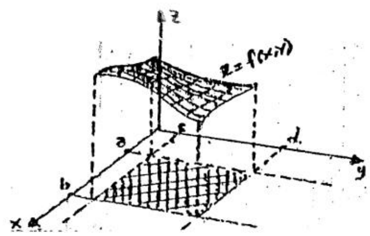
CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

Trabajo Práctico N° 8:
Integrales Múltiples

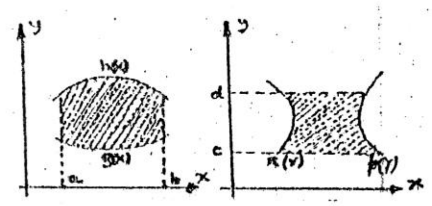
Dada una cierta región del plano "xy" y una superficie de ecuación $z = f(x,y)$, definida sobre dicha región, que supondremos rectangular, entonces, el volumen del cuerpo limitado por el plano "xy", la superficie $z = f(x,y)$ y los planos de ecuación: $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$, viene dado por:

$$V = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$



Suponemos para ello que la función $z = f(x,y)$ es continua, acotada y de valores positivos en dicha región.
Para calcular la integral doble, procedemos a calcular las integrales reiteradas, integrando primero con respecto a una variable, por ejemplo "x", considerando a "y" constante, este resultado que será una función de "y", luego lo integraremos respecto de "y".
Igual resultado obtendríamos integrando primero respecto de "y" y luego respecto de "x".
Si la región de integración tuviera curvas en su contorno, entonces: en el primer caso, procederemos a fijar el valor de "x", e integramos respecto de "y", para "y" variando entre h(x) y g(x) luego integramos respecto de "x" para "x" variando entre a y b.
Entonces:

$$V = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b F(x)\,dx$$



En el otro caso, integraremos primero respecto de "x", para "x" variando entre r(y) y p(y), y luego con respecto a "y", para "y" variando entre c y d.
A veces resulta más sencillo integrar en un sentido que en el otro, por lo que conviene siempre estudiar previamente la región de integración.

Ejercicios:

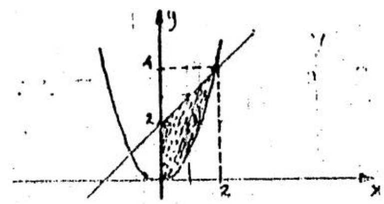
1) En cada uno de los siguientes casos, calcular las integrales reiteradas, representando previamente la región de integración.
   a) $f(x,y) = x + y$, $R = \{(x,y) \in R^2 / 1 \le x \le 4 ; 2 \le y \le 4\}$
   b) $f(x,y) = 3xy^2$, $R = \{(x,y) \in R^2 / -1 \le x \le 0 ; 2x \le y \le 2x^2\}$
   c) $f(x,y) = \text{sen}\,(x + y)$, $R = \{(x,y) \in R^2 / 0 \le x \le \Pi ; 0 \le y \le \Pi\text{-}x\}$
   d) $f(x,y) = y/x$, $R = \{(x,y) \in R^2 / ½ \le x \le 1 ; -(x + 1)^{1/2} \le y \le -x^3\}$

2) Dibujar el recinto de integración y calcular:

a) $= \int_0^2 \int_y^2 f(x,y)\, dx\, dy$ para $f(x,y) = xy - x$

b) $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} (x^2 + 2y)\, dy\, dx$

3) calcular la integral doble de la función $f(x,y) = x \,.\, e^y$, definida sobre la región del dibujo en un sentido. Plantear la integral doble en el otro sentido.



4) Dibujar el recinto de integración en los siguientes casos:

$$\int_{-6}^{2} \int_{(y^2/4)-1}^{2-y} f(x,y)\, dx\, dy$$

$$\int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\operatorname{sen} x} f(x,y)\, dy\, dx$$

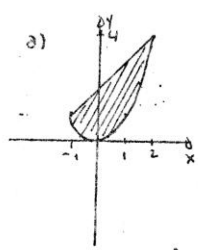
5)a) Dibujar la región R del plano "xy" limitada por: $y=x^2$, $x=2$, $y=1$, $y=4$.

b) Calcular $\iint_R (x^2 + y)\, dx\, dy$.

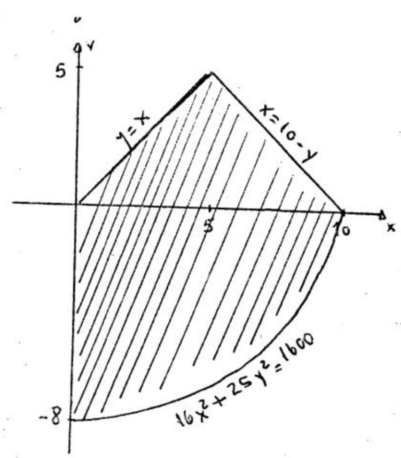
c) Plantear en el otro sentido.

6) Dados los siguientes recintos de integración, plantear la integral doble en los dos sentidos de integración:

a)



b)



c)