

Definición

Los filtros digitales son una clase de sistemas discretos lineales e invariantes al desplazamiento (LTI), utilizados para extraer características desde el dominio de la frecuencia sobre señales muestreadas.

Ventajas y desventajas respecto a los filtros analógicos

Ventajas:

1. Los FD tienen alta inmunidad al ruido
2. La exactitud depende del error de redondeo, el cual puede manejarse
3. es más fácil y barato cambiar las características de un FD porque sólo se modifican las variables del programa
4. Las variaciones de temperatura y tensión de alimentación no inciden sobre la estructura del programa almacenado ni el rendimiento del filtro
5. El costo es progresivamente menor en los sistemas de computación y aumentan permanentemente las velocidades de procesamiento

Desventajas:

1. La precisión depende de la longitud de la palabra de datos, o sea la que contiene los coeficientes del filtro.
2. El tamaño de los registros que contienen los resultados de las multiplicaciones puede provocar un estado de saturación (overflow), por lo que es necesario aplicar redondeos para evitar propagación del error.
3. A mayor pendiente en la característica del filtro, mayor número de coeficientes, lo que implica mayor tiempo de procesamiento, atentando contra los procesos que se desean realizar en tiempo real.
4. Si se emplean microprocesadores de punto fijo, habrá necesidad de escalar los coeficientes a fin de ajustarlos al rango permitido.

Algunos parámetros característicos relativos

Respuesta dinámica:

El ancho de banda del filtro digital está limitado por la frecuencia de muestreo, mientras que en los filtros analógicos con componentes activos suelen estar restringidos por los amplificadores operacionales.

Intervalo dinámico:

En los filtros analógicos aparecen derivas que limitan por abajo el rango y se saturan con la alimentación. En cambio en los filtros digitales es fijado por el número de bits que representa la secuencia, y el límite inferior por el ruido de cuantificación y por los errores de redondeo.

Conmutabilidad:

Si los parámetros de un filtro se conservan en registros, los contenidos de dichos registros pueden ser modificados a voluntad. De esta forma, estos filtros se pueden transformar, pudiéndose multiplexar en el tiempo para procesar varias señales de entradas a la vez.

Adaptabilidad:

Un filtro digital puede ser implementado en soporte físico (*hardware*) o mediante un programa de ordenador (*software*).

Ausencia de problemas de componentes:

Los parámetros de los filtros se representan por medio de números binarios y no derivan con el tiempo. Al no haber componentes, no hay problemas de tolerancia o deriva de componentes, y ningún otro problema asociado con un comportamiento no ideal de resistencias, condensadores, bobinas o amplificadores. Tampoco existen problemas de impedancia de entrada ni salida, ni efectos de adaptación de impedancias entre etapas.

Complejidad:

La potencia de cálculo de los computadores actuales y de los algoritmos desarrollados, permiten implementar prestaciones casi imposibles de diseñar con filtros analógicos.

Clasificación de los filtros digitales

Recordamos la ecuación en diferencia que especificaba a un sistema LTI

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad 7.1$$

Aplicando la Transformada z tenemos

$$\sum_{k=0}^N a_k Y[z]z^{-k} = \sum_{k=0}^M b_k X[z]z^{-k} \quad 7.2$$

Reacomodando términos

$$Y[z] \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \right) = X[z] \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \quad 7.3$$

Pasando al segundo miembro la sumatoria de coeficientes, despejamos Y[z]

$$Y[z] = X[z] \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\left(1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \right)} \quad 7.4$$

Y finalmente encontramos la función de transferencia generalizada de un sistema LTI

$$H[z] = \frac{Y[z]}{X[z]} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\left(1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \right)} \quad 7.5$$

Que también se corresponde a un filtro digital genérico.

A partir de la ecuación 7.5 vamos a distinguir los dos tipos de filtro que se caracterizan por su respuesta al impulso.

a) Si los coeficientes a_k son todos nulos menos para $k=0$ el filtro se denomina **FIR (Respuesta Finita al Impulso)**, con lo que la ecuación quedaría así

$$H[z] = \frac{Y[z]}{X[z]} = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \quad 7.6$$

Obsérvese que en estos tipos de filtros cada valor de la secuencia de salida sólo dependerá de un número finito de valores de la secuencia de entrada. Además también se desprende de la carencia de polos en la función de transferencia

b) si los coeficientes b_k son iguales a cero menos para $k=0$ se tiene un filtro **IIR (Respuesta Infinita al Impulso)**, en cuyo caso la ecuación quedaría así

$$H[z] = \frac{Y[z]}{X[z]} = \frac{1}{\left(1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}\right)} \quad 7.7$$

Aun en el caso de que algunos coeficientes b_k sean distintos de cero, el filtro seguiría siendo IIR, ya que son los a_k o sea los polos, los que determinan en definitiva la característica general del filtro. En estos casos, la secuencia de salida depende tanto de la entrada como de la salida

Estabilidad:

De estas ecuaciones se deducen las siguientes propiedades:

- 1) la secuencia de ponderación es infinita para los filtros IIR, aun teniendo un número finito de coeficientes. Mientras la respuesta al impulso de un filtro no recursivo es siempre finita e igual al orden del filtro.
- 2) los filtros FIR prácticos son siempre estables, esto es, la secuencia de salida tiene todos sus valores acotados. No es el caso de los filtros recursivos, su estabilidad depende de la función de transferencia, por lo que habrá de utilizar alguno de los procedimientos algebraicos, como el de Jury, para analizar su estabilidad.
- 3) cualquier filtro recursivo puede ser reemplazado por otro no recursivo con infinitos coeficientes, sus valores vendrán dados por la secuencia de ponderación del IIR. La conclusión inversa no se cumple

Causalidad y estabilidad

Recordamos que un sistema lineal e invariante al desplazamiento (tiempo) causal es aquel cuya respuesta al impulso $h(n)$ satisface la condición

$$h(n) = 0 \quad n < 0 \quad 7.8$$

También hemos visto que la ROC de la transformada z de una secuencia causal es el exterior de un círculo, por lo tanto un sistema LIT es causal si la ROC de la función de transferencia es el exterior de un círculo de radio $r < \infty$, incluyendo el punto $z = \infty$.

La estabilidad de un sistema LIT se puede establecer en función de las características de la función del sistema.

La condición necesaria y suficiente para que un sistema LIT sea estable BIBO (Bounded Input, Bounded Output), es

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad 7.9$$

A su vez esta condición implica que $H(z)$ debe contener a la circunferencia unidad dentro de la ROC

De hecho, puesto que

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} \quad 7.10$$

Se deduce que

$$|H(z)| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(n)z^{-n}| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(n)||z^{-n}| \quad 7.11$$

Cuando se evalúa sobre la circunferencia unidad ($|z|=1$),

$$|H(z)| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(n)| \quad 7.12$$

Por lo tanto si el sistema es estable BIBO, la circunferencia unidad está contenida en la ROC de $H(z)$, y lo inverso es también cierto.

Filtros ideales

Los filtros digitales suelen ser caracterizados en términos de rangos de frecuencia, tanto de la banda pasante como de la supresora. Los cuatro tipos básicos de filtros supresores son ilustrados en la figura 12.14. Al ser éstos sistemas discretos, sus respuestas frecuenciales son periódicas con la frecuencia de Nyquist, ω_N , por lo que sólo se considerará el intervalo $[-\omega_N, \omega_N]$.

Los gráficos que representan la respuesta de los filtros más empleados

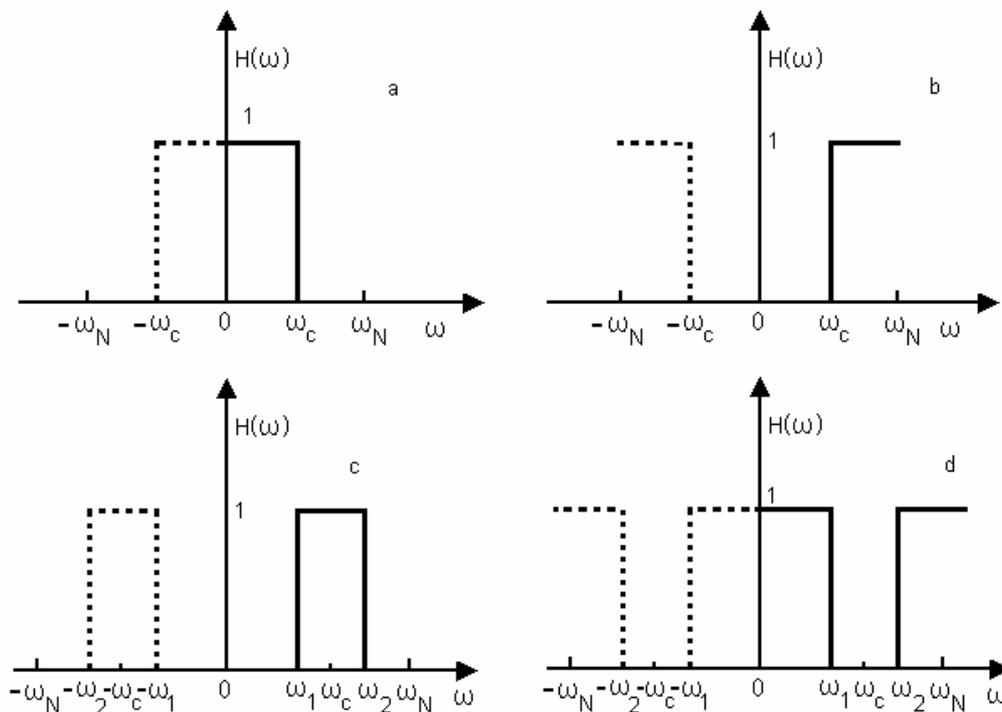


Figura N° 7.1 Respuesta en frecuencia de filtros a) pasa bajos, b) pasa altos c) pasa banda d) elimina banda

En la figura 7.1 sólo se muestran las respuestas en frecuencia del módulo sin que aparezca el argumento. Sin embargo, como se acaba de comentar, es deseable que en la banda pasante no se introduzcan desfases o que sean de fase lineal. Con tal propósito se parte de la realización de un filtro con variación lineal del argumento respecto a la frecuencia, esto es, se tendrá que el desfase introducido es del tipo $\varphi = -\lambda\omega T$, donde λ es una constante. El caso particular de desfase nulo será igual a cero.

Luego si ante una señal de entrada periódica con las condiciones de Fourier, ésta se separa en forma de sumas de senoidales del tipo $\text{sen}(k\omega T)$, cada una de ellas producirá una respuesta del tipo:

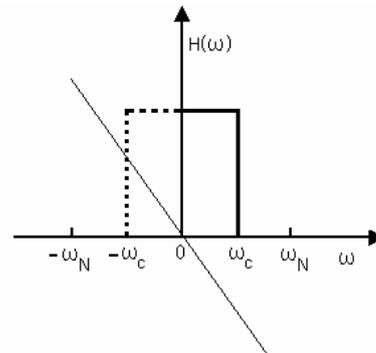
$$|H(\omega)| \cdot \text{sen}(\omega(kT - \lambda)) \quad 7.5$$

Por lo tanto, cada armónico de la señal de entrada estará desfasada $-\lambda\omega$ veces, de forma que se obtendrá en la salida una versión no distorsionada de la señal de entrada en el rango de frecuencias dependientes de la banda pasante. A razón de lo expuesto, el diseño de un filtro paso bajo deberá de cumplir con las condiciones mostradas en la figura. El módulo será constante en la banda pasante y nulo en la supresora, mientras el desfase tendrá que ser lineal con la frecuencia. Un posible modelo matemático que caracterice este tipo de respuesta correspondería a:

$$|H(\omega)| = \begin{cases} e^{j\lambda\omega T} & \text{para } |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad 7.6$$

siendo la respuesta en fase lineal o sea

de manera que si se aplica la transformada inversa de Fourier, la secuencia de ponderación del filtro quedará como:



$$h[k] = \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_n}^{\omega_n} H(\omega) \cdot e^{jk\omega T} d\omega = \int_{-\omega_n}^{\omega_n} e^{j(k-\lambda)\omega T} d\omega$$

$$h[k] = \frac{T}{\pi} \frac{\text{sen}[k - \lambda]\omega_c T}{(k - \lambda)T} = \frac{\omega_c}{\omega_N} \frac{\text{sen}[k - \lambda]\omega_c T}{(k - \lambda)T} \quad 7.7$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Desprendiéndose que el filtro paso bajo es no causal y por lo tanto no realizable físicamente.

Diseño de filtros digitales

El diseño de los filtros requiere de las siguientes etapas:

- (1) especificaciones de las propiedades deseadas del sistema,
- (2) aproximaciones de las especificaciones mediante un sistema causal en tiempo discreto
- (3) la realización del sistema.

La primera es altamente dependiente de la aplicación y la tercera de la tecnología utilizada para la implementación. En términos prácticos, el filtro deseado se realiza utilizando cómputo digital y se emplea para una señal que proviene de tiempo continuo seguido por una conversión analógico-digital. Cuando se utiliza un filtro digital para realizar el tratamiento de señales en tiempo continuo, tanto las especificaciones del filtro en tiempo discreto como las que se indica en tiempo continuo se suelen dar en el dominio de la frecuencia. Si se usa un sistema LTI y si la entrada es de banda limitada y la frecuencia de muestreo es lo suficientemente alta para evitar el solapamiento, el sistema completo se comporta como un sistema LTI continuo en el tiempo cuya respuesta en frecuencia es:

$$H_C(\omega) = \begin{cases} H_d(\omega) & |\omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & |\omega| > \frac{\pi}{T} \end{cases}$$

En estos casos es inmediato convertir las especificaciones del filtro efectivo de tiempo continuo, $H_C(\omega)$, en especificaciones del filtro en tiempo discreto, $H_d(\omega)$. La arquitectura presentada parece evidente que es más compleja y costosa que el uso de células Sallen-Key para implementar filtros analógicos. Sin embargo, los filtros digitales exhiben abrumadoras ventajas respecto a los sistemas de tiempo continuo. Una enumeración de los beneficios puede enmarcarse dentro de la comparación entre estos dos tipos de filtros:

Implementación de sistemas

Las estructuras mas comúnmente empleadas para el diseño de filtros digitales son

Para filtros FIR, estructuras en forma

- a) DIRECTA
- b) en CASCADA
- c) en CELOSIA

Para filtros IIR, las estructuras en forma

- a) DIRECTA
- b) en CASCADA
- c) PARALELA

Diagrama en bloques de los filtros

De la misma manera como se representaban los sistemas de tiempo discretos, los filtros pueden hacerlo, de manera de tener graficada la estructura y observar el flujo de los datos de una manera más conveniente.

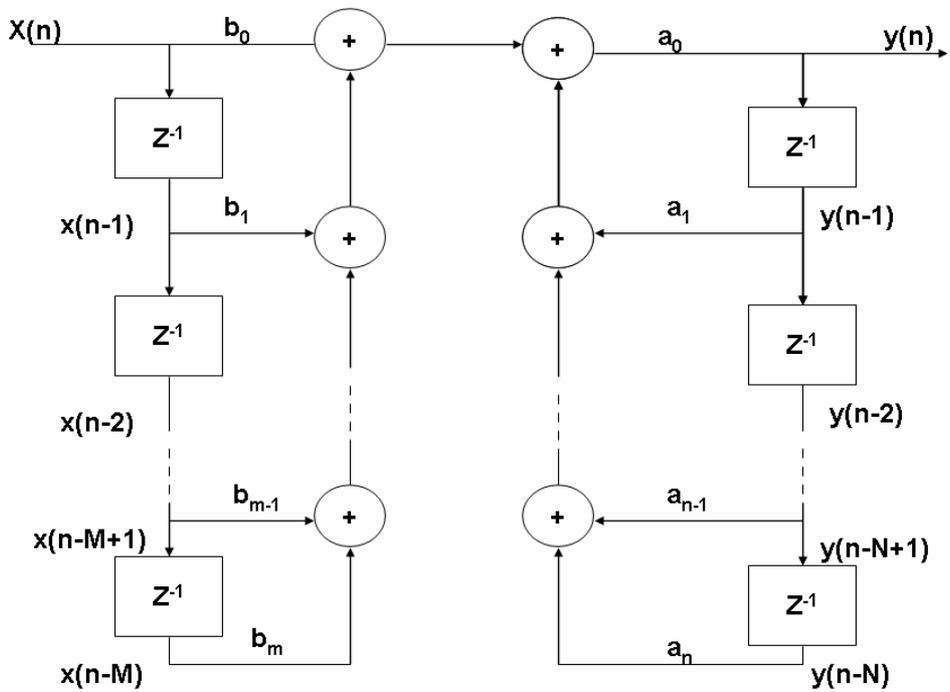


Figura 7.2 Diagrama de un filtro digital genérico