Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura
Departamento de Ingeniería
Cátedra: Señales y Sistemas
Apuntes de cátedra
Tema 4 : Señales de tiempo discreto

Resumen

Cuando nos referimos a señales de tiempo discreto hacemos referencia a señales analógicas que han sido muestreadas, y que se encuentran en una secuencia de números de precisión finita. Este tipo de señales ha sido adecuada para ser procesada por sistemas de computación, tanto en el ámbito científico como en el financiero o el de la ingeniería biomédica.

Objetivos

Se pretende brindar al alumno las nociones básicas sobre señales y sistemas de tiempo discreto, como así también las herramientas matemáticas que permiten el análisis y la obtención de la información.

Introducción

Las señales discretas pueden proceder de estudios demográficos, datos económicos o meteorológicos para los cuales la variable independiente es inherentemente discreta. Otro tipo de fuentes de secuencias son aquellas provenientes de un muestreo de señales que originariamente son de tiempo continuo. Se entiende que en el proceso de captura las muestras corresponden a tiempos equiespaciados y el valor de ese lapso de tiempo es la inversa de la tasa o frecuencia de muestreo.
El interés creciente del procesado discreto está basado en la versatilidad y eficiencia que presentan los sistemas actuales de cómputo. Los dispositivos que realizan un proceso sobre una secuencia numérica emplean un tiempo de cálculo que depende del grado de precisión y de la complejidad del algoritmo utilizado.
Cuando el tiempo de proceso es tan breve que hace suponer un cálculo casi instantáneo, se lo suele denominar de *tiempo real*. Esto es frecuente en el procesamiento de audio, sistemas de control, comunicaciones, radar, sonar, video, ingeniería biomédica, etc.

Secuencia

Una secuencia se define como $x_0, x_T, x_{2T}, ..., x_{nT}$, que puede escribirse $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$

o más genéricamente $\{x_k\} = \{...x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, ...\}$
donde T es el período de muestreo. Analíticamente a una secuencia se la puede considerar de duración infinita.

Secuencias básicas

Impulso unitario. Es la secuencia (unitaria) más sencilla y muy utilizada. Se define así

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \qquad (4.1)$$

la propiedad más importante de la secuencia impulso se debe a que cualquier secuencia arbitraria *x[n]* puede expresarse como

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \qquad (4.2)$$

donde los *x[k]* se consideran sólo constantes de amplitud.

Secuencia escalón unitario

Obedece a la siguiente condición

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

la relación entre la secuencia impulso y la secuencia escalón viene dada por

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] \quad (4.4)$$

pudiendo definir el impulso unitario discreto como

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \quad (4.5)$$

Secuencia de exponenciales en base real

Dadas las constantes A y α, definimos una secuencia exponencial como

$$x[n] = A\alpha^{n} \quad (4.6)$$

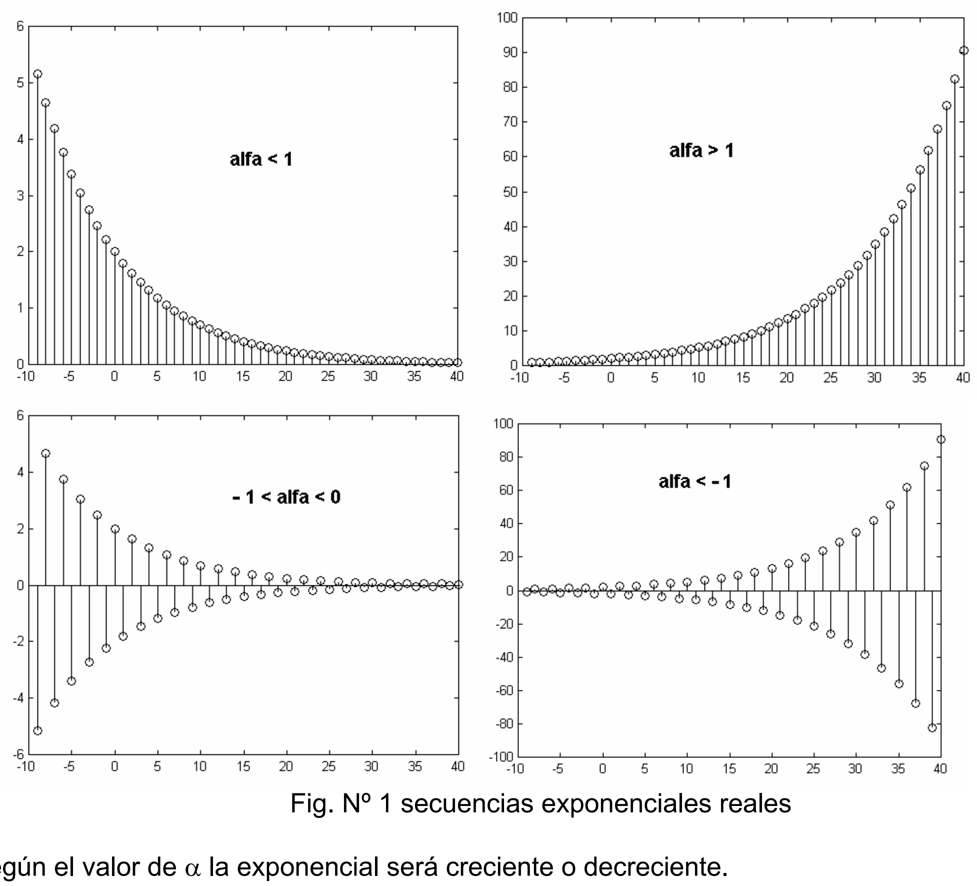

Fig. Nº 1 secuencias exponenciales reales

según el valor de α la exponencial será creciente o decreciente.

Secuencia de senoidales

La expresión viene dada por

$$x[n] = A\cos(\omega_0 \cdot n + \varphi) \quad (4.7)$$

Siendo A constante real y ω_0 la “frecuencia de tiempo discreto” en radianes por unidad de tiempo, y φ la fase también en radianes.

Observaciones

No siempre son secuencias periódicas. La condición de periodicidad para una secuencia *x[n]* es *x[n] = x[n + N]* (siendo N una constante entera). Aplicada a nuestro caso, se traduce en:

$$\omega_0 \cdot N = 2 \cdot \pi \cdot k \quad (4.8)$$

siendo k una constante entera. Sólo en el caso en que la frecuencia ω_0 cumpla la anterior condición, nos encontraremos ante una secuencia sinusoidal periódica, de período N. Nótese que una secuencia sinusoidal discreta puede proceder del muestreo de una señal continua. Dependiendo de cómo se efectúe este muestreo, los valores de las muestras seleccionadas en un período podrán coincidir (secuencia periódica) o no (secuencia no periódica) con los valores elegidos en el resto de los períodos de la sinusoide continua.

El conjunto de valores (ω_0 +2πr), con r constante entera, generan todos la misma secuencia sinusoidal:

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + 2\pi r n + \varphi) = A\cos(\omega_0 n + \varphi) \quad (4.9)$$

Por tanto, a la hora de realizar un análisis de frecuencia de la secuencia *x[n] = A cos(*ω_0 n+φ*)*, sólo necesitamos considerar el intervalo de frecuencias $- \pi < \omega_0 \leq \pi$.

• Visto lo anterior, para un valor de ω_0 cercano a 0, la sinusoide presentará pocas oscilaciones (frecuencia baja), mientras que para valores de ω_0 cercanos a $\pm\,\pi$ la sinusoide correspondiente oscilará rápidamente (frecuencias altas).

• Como conclusión, dada una sinusoide periódica de período N, su frecuencia fundamental vendrá dada por 2π/N y sólo existirá un conjunto finito de N frecuencias armónicas, a saber:

$$\omega_k = 2k\pi/N, \; k = 1, 2, \ldots, N.$$

Secuencias de exponenciales complejas

Una secuencia exponencial compleja viene dada por la expresión

$$x[n] = A\alpha^n \; siendo \quad A = |A| e^{j\phi} \quad \alpha = |\alpha| e^{j\omega_0} \quad (4.10)$$

de esta manera podemos expresar x[n]

$$x[n] = |A||\alpha|^n e^{j(\omega_0 n + \phi)} = |A||\alpha|^n \cos(\omega_0 n + \phi) + j|A||\alpha|^n \sin(\omega_0 n + \phi) \quad (4.11)$$

Si $|\alpha| \neq 1$, las partes real e imaginaria de x[n] serán secuencias sinusoidales que se van amortiguando ($|\alpha| < 1$) o amplificando ($|\alpha| > 1$) con el tiempo. Para el caso $|\alpha| = 1$, la secuencia resultante se denomina sinusoide compleja.

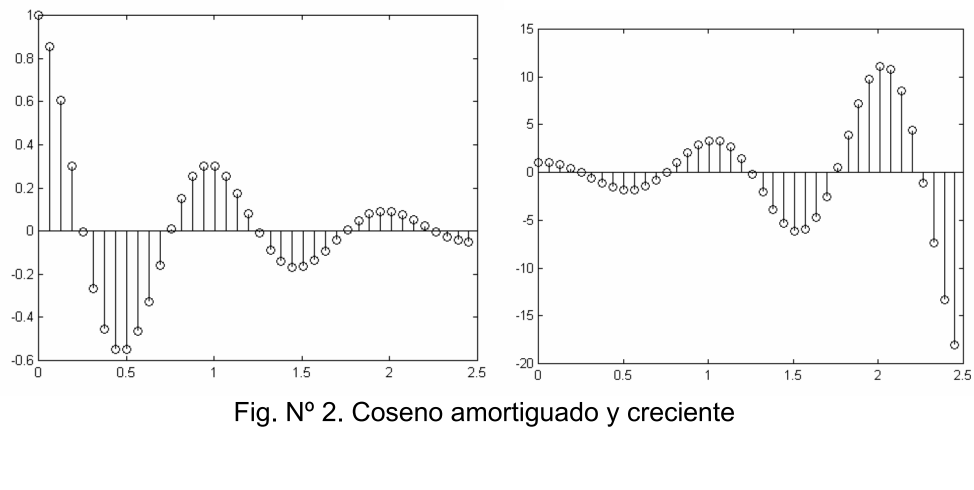

Fig. Nº 2. Coseno amortiguado y creciente

Operaciones elementales con secuencias discretas

Suma y producto entre dos secuencias

$$s[n] = x[n] + y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{x[k] + y[k]\} \cdot \delta[n-k] \quad (4.12)$$

$$p[n] = x[n] \cdot y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \{x[k] \cdot y[k]\} \cdot \delta[n-k] \quad (4.13)$$

Operando con secuencias truncadas, aparece un problema cuando están definidas en distintos intervalos de tiempo. Una primera solución consiste en añadir ceros en forma conveniente a las secuencias truncadas y otra consiste en un nuevo truncamiento de manera que el nuevo intervalo de tiempos sea el común a las dos secuencias.

Cambio de amplitud

Dada x[n] y la constante real A, obtenemos una nueva secuencia y[n] = Ax[n], donde cada muestra de x[n] queda multiplicada por la constante A. Cuando | A | > 1, la secuencia resultante y[n] es una versión amplificada de la original, mientras que si |A| < 1, y[n] es una versión atenuada. Además, si A < 0 también se produce un cambio de polaridad.

Desplazamiento lineal

Dada x[n] y la constante entera n_o , la secuencia desplazada y[n] = x[n - n_o] será una traslación de n_o unidades hacia la derecha si n_o > 0 ó hacia la izquierda cuando n_o < 0. Al operar con secuencias truncadas, un desplazamiento origina la pérdida de un conjunto de valores por un extremo del vector; por el otro extremo, habrá que añadir tantos ceros como valores hayamos perdido, tal como se muestra en el siguiente ejemplo. Considerando la secuencia exponencial truncada del ejemplo siguiente, el desplazamiento de 10 unidades hacia la derecha de dicho vector será de esta manera:

```
>> n = -9:40;
>> e 10 = zeros(50,1);
>> e 10(11:50) = e(1:40)’;
>> stem(n,e 10)
>> title(’Desplazamiento’), xlabel(’ n ’), (replot)
```

Desplazamiento circular

Considerando la secuencia del anterior ejemplo, el desplazamiento circular de 10 unidades hacia la derecha sería:

```
>> n = -9:40;
>> ec 10 = zeros(50,1);
>> ec 10(1:10) = e(41:50)’;
>> ec 10(11:50) = e(1:40)’;
>> stem(n,ec 10)
>> title(’Despl. circular’), xlabel(’ n ’), (replot)
```

Reflexión

Partiendo de x[n], la secuencia reflejada será x[- n]. Gráficamente, la reflexión consiste en realizar un abatimiento de la señal respecto al eje de ordenadas. En MATLAB el operador “2 puntos” ayuda a reflejar un vector. Además, deberá tenerse en cuenta el cambio del vector de índices temporales.
Continuando con la secuencia exponencial del ejercicio anterior, el proceso para reflejarla sería:

```
>> n = -40:9;
>> er = e(length(e):-1:1);
>> stem(n,er)
>> title('Reflexión'), xlabel(' n '), (replot)
```

Secuencias asociadas

Dada una secuencia arbitraria x[n], en general compleja, podemos definir a partir de ella las siguientes secuencias:

Parte Par $x_p[n] = \frac{x[n] + x[-n]}{2}$

Parte Impar $x_i[n] = \frac{x[n] - x[-n]}{2}$

$$x[n] = x_p[n] + x_i[n]$$

Parte Real $x_r[n] = \frac{x[n] + x^*[n]}{2}$

Parte Imaginaria $x_j[n] = \frac{x[n] - x^*[n]}{2j}$

$$x[n] = x_r[n] + j\, x_j[n]$$

Secuencia conjugada: $x^*[n] = x_r[n] - j \cdot x_j[n]$

Parte Hermítica $x_h[n] = \frac{x[n] + x^*[-n]}{2}$

Parte Antihermítica $x_a[n] = \frac{x[n] - x^*[-n]}{2}$

Conversor Analógico-Digital

Una señal analógica cuenta con infinitos puntos separados en un infinitesimal de tiempo. Para que pueda ser muestreada se necesita una resolución infinita y el tiempo de muestreo y cuantización debería ser nulo, por lo que no es posible con técnicas actuales. Los conversores reales ofrecen distintas alternativas para realizar el proceso de digitalización de una señal. Encontramos dispositivos con dos métodos de conversión.

- directos (lazo abierto)
- con realimentación (lazo cerrado)

Métodos de conversión directo

En estos dispositivos no se emplea un conversor DAC cuya salida pueda utilizarse como comparación con la tensión de entrada, sino que la señal sufre un proceso de conversión en un solo sentido según dos técnicas que le dan el nombre al conversor

- doble rampa
- comparación instantánea (flash o paralelo)

Convertidores A/D de doble rampa

Se emplean ampliamente en aplicaciones en donde la mayor importancia estriba en la inmunidad al ruido, gran exactitud y economía. Los convertidores de doble rampa pueden suprimir la mayor parte del ruido de la señal de entrada debido a que emplean un integrador para efectuar la conversión. El rechazo del ruido puede ser infinito para una frecuencia específica del ruido si el primer periodo de integración del convertidor se iguala al periodo del ruido. Por lo tanto, para rechazar el ruido prevaleciente debido a las líneas de alimentación de 60 Hz, se necesita que T1 sea de 16.667 ms. Sin embargo, esta ventaja también conduce a tiempos de conversión muy largos. Sin embargo las ventajas de los convertidores de doble rampa los hacen muy adecuados para aplicaciones en las que no sean necesarios tiempos breves de conversión. Se emplean mucho, en especial en aplicaciones de instrumentos de precisión tales como voltímetros digitales.

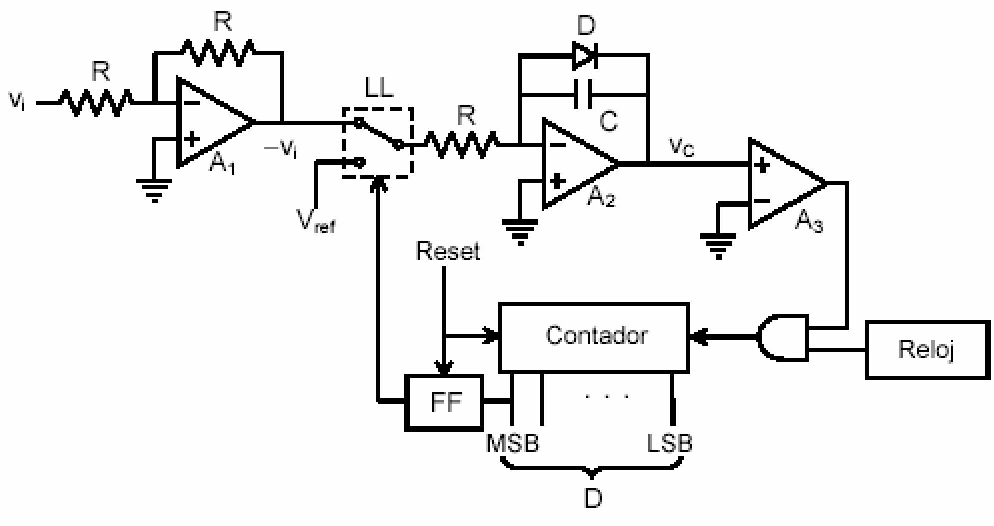

Fig Nº 3. Conversor de doble rampa.

Resulta interesante observar en la Fig. 4 la tensión del capacitor Vc donde se verifica la doble rampa que le da el nombre al conversor. La pendiente de subida es proporcional a la tensión de entrada, pero al completarse el conteo en el contador, el tiempo es constante. A partir de ese instante se empieza a descargar con una pendiente proporcional a la tensión de referencia, por lo que las pendientes en esta zona serán siempre constantes, para cualquier valor de la tensión de entrada.

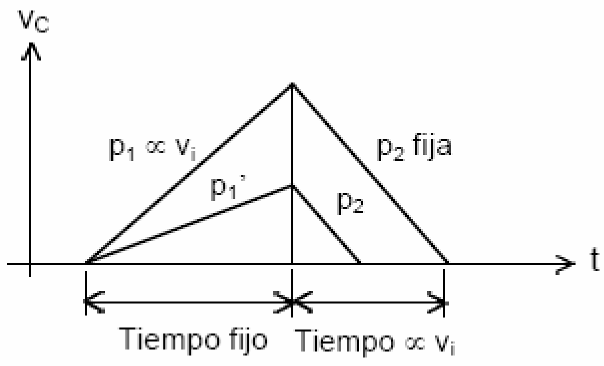

Fig. Nº 4 Tensión Vc en el capacitor

Convertidor en paralelo (o instantáneo)

Estos convertidores llevan a cabo las más rápidas conversiones A/D. En esta técnica, el voltaje de entrada se alimenta simultáneamente a una entrada de cada uno de los P comparadores. La otra entrada de cada comparador es un voltaje de referencia. El comparador recibe un valor distinto del voltaje de referencia, comenzando en VRmax. Empleando el principio del divisor de voltaje y valores iguales de R, el valor del voltaje de referencia VRp en cada comparador estará dado por

$$VRp = VRmax\ P/Q$$

Siendo
- p = número del comparador (de 1 a P)
- P = número total de comparadores
- Q = número total de resistencias = P + 1

Así, el voltaje de entrada se compara de manera simultánea con valores de voltaje, igualmente espaciados (de 0 a VRmax).

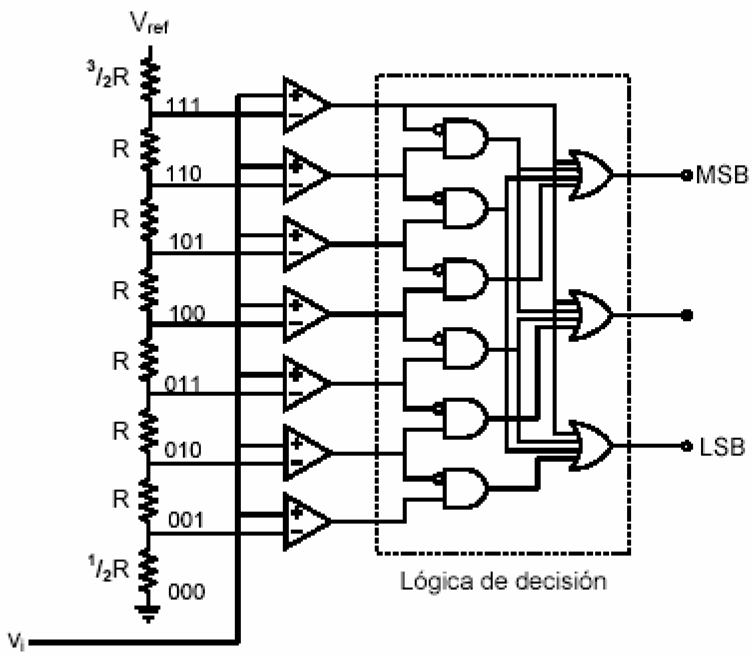

Fig. Nº 5 Convertidor paralelo de tres bits

Métodos de conversión con realimentación

Estos dispositivos convierten la señal digitalizada en analógica a través de un DAC y lo emplean para compararla con la señal de entrada, ejerciendo un parámetro de control del proceso. Encontramos dos tipos particulares de conversores:

- de rampa directa (rampa de escalera)
- de aproximaciones sucesivas

Convertidores A/D de rampa directa

Los convertidores más sencillos son de este tipo. Cuando se aplica un comando de inicio o arranque la lógica de control, el voltaje analógico de entrada se compara con una salida de voltaje de un convertidor D/A. Esta salida comienza en cero y se incrementa en un bit menos significativo con cada pulso del reloj. Siempre que el voltaje de entrada sea mayor que el voltaje de salida del convertidor D/A, el comparador producirá una señal de salida que continúa permitiendo que los pulsos del reloj se alimenten al contador. Sin embargo, cuando el voltaje de salida de ese convertidor es mayor que el voltaje de entrada, la salida del comparador cambia y esta acción evita que los pulsos del reloj lleguen al contador. El estado del contador en ese instante representa el valor de voltaje de entrada en forma digital. La desventaja de este tipo de convertidores es que, no obstante su simplicidad, es bastante lento y el tiempo de conversión depende de la amplitud de voltaje de entrada.

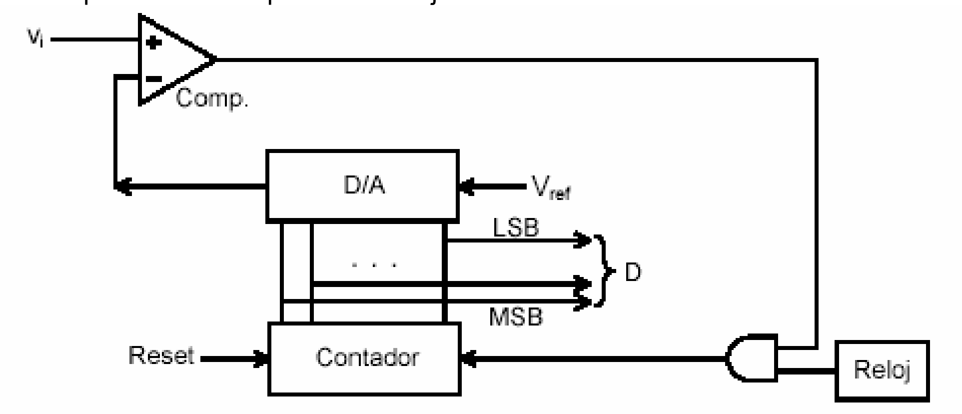

Fig. Nº 6 Conversor de rampa en escalera

Convertidores A/D de aproximaciones sucesivas

Se utilizan ampliamente debido a su combinación de alta resolución y velocidad, ya que pueden efectuar conversiones entre 1 y 50 m s. Sin embargo, son más caros. La lógica de este convertidor prueba varios códigos de salida y los alimenta al convertidor D/A y a un registro de almacenamiento y compara el resultado con el voltaje de entrada a través del comparador. La operación es análoga a la acción de pesar una muestra en una balanza de laboratorio con pesos estándar en una secuencia binaria. El procedimiento correcto es comenzar con el mayor peso estándar y proseguir en orden hasta el menor. La muestra se coloca en un platillo y el peso mayor se coloca en el otro; si la balanza no se inclina, se deja el peso, y se coloca el siguiente con menor peso. Si la balanza se inclina, se quita el peso mayor y se agrega el siguiente menos pesado. Se usa el mismo procedimiento para el siguiente valor menos pesado y así se prosigue hasta el menor. Después de que se ha probado el enésimo peso y se ha tomado una decisión, se dan por terminadas las mediciones de peso. El total de las pesas que se encuentran en el platillo es la aproximación más cercana al peso de la muestra. En el convertidor de aproximaciones sucesivas, se implementa el procedimiento de medición de pesos mediante un convertidor D/A, un comparador, un registro de almacenamiento y una lógica de control.

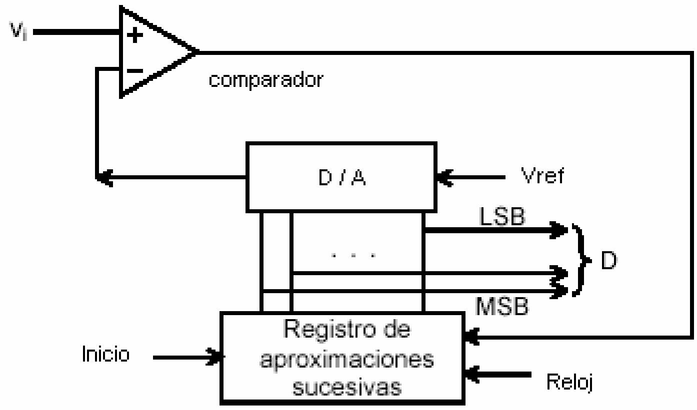

Fig Nº 7 Conversor de aproximaciones sucesivas

Si deseamos ver la manera como se realiza la operación de aproximación hacia el valor de la tensión de entrada, podemos observar en la Fig. 8 el recuadro donde la línea gruesa indica la salida analógica del Conversor DAC, que se “aproxima” en cada etapa una diferencia de potencial que es la mitad (en valor absoluto) de la considerada en la etapa anterior. La precisión dependerá de la cantidad de veces que se realice este proceso.

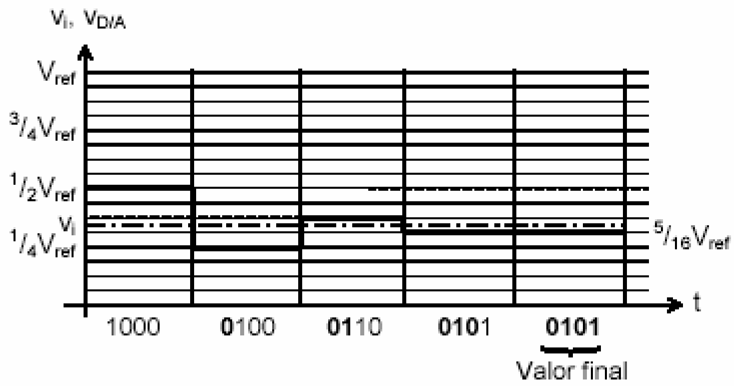

Fig. Nº 8 Proceso de acercamiento al valor de tensión de la entrada.

Convertidor de voltaje a frecuencia

En este tipo de convertidores, el voltaje de CD de entrada se convierte en un conjunto de pulsos cuya velocidad de repetición (o frecuencia) es proporcional a la magnitud del voltaje de alimentación. Los pulsos se cuentan mediante un contador electrónico en forma semejante al de contar las longitudes de onda con el contador de intervalo de tiempo en el voltímetro digital de doble rampa. Por lo tanto, la cuenta es proporcional a la magnitud del voltaje de entrada. La parte primordial de esos convertidores es el circuito que transforma el voltaje de CD de entrada a un conjunto de pulsos. Se emplea un integrador para llevar a cabo esta tarea. Las frecuencias típicas del convertidor de voltaje a frecuencia (V/F) quedan en el rango de 10 kHz a 1 kHz. El convertidor muy utilizado de 10 kHz necesita un intervalo de compuerta de 0.025 s para una conversión A/D de 8 bits.