

1.- Pandeo. Flexión lateral o efecto de pandeo. Condiciones de apoyo.

Si tuviéramos dos columnas cargadas con el mismo esfuerzo N aplicado en el centro de gravedad de la sección y de altura H_1 y H_2 respectivamente (Fig. 73) y quisiéramos dimensionarlas, por tratarse de cuerpos sometidos a un esfuerzo de compresión deberíamos aplicar lo visto en el tema XIV y por consiguiente en ambos casos resultaría una sección:

$$S = b \times h = \frac{N}{\sigma_{ad}} \quad (105)$$

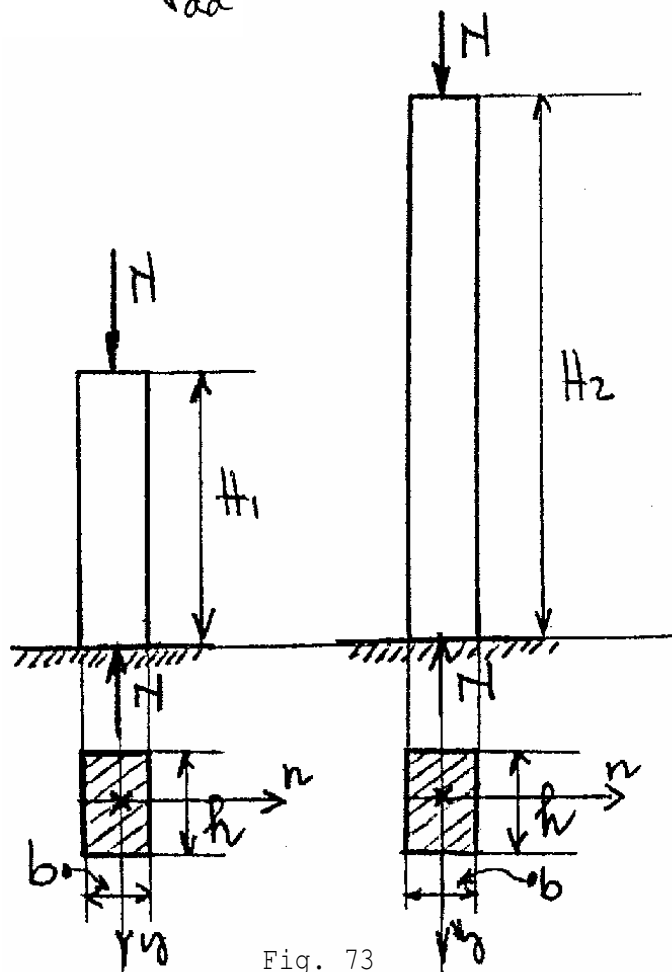
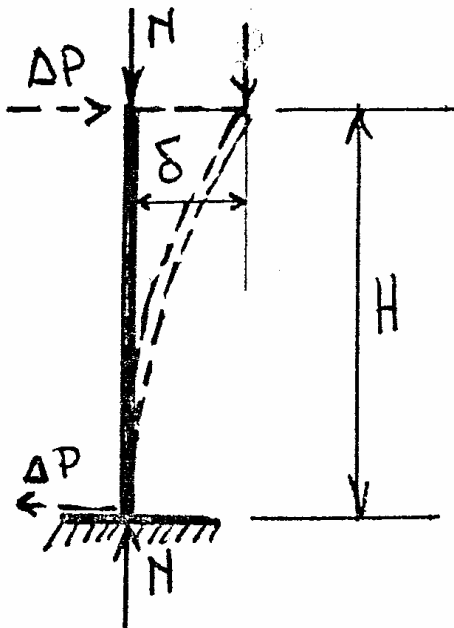


Fig. 73

Pero al hacer así es probable que estuviéramos cometiendo un grave error. En efecto la fórmula (105) puede aplicarse independientemente del valor de H siempre y cuando N sea un esfuerzo de tracción pero si N es de compresión (como en la Fig. 73), la (105) solo es aplicable hasta cierto valor de H .

Esto se debe a un efecto denominado pandeo y que a continuación pasaremos a explicar.

Volviendo al caso de la Fig. 73, si mantenemos constante las dimensiones b y h de la sección (o sea mantenemos constante también su superficie y sus momentos de inercia principales I_{xx} e I_{yy}), mantenemos constante la carga N y hacemos variar la altura H podríamos, teóricamente, a cada escalón de altura colocar horizontalmente una fuerza infinitésima ΔP según se muestra en la Fig. 74.-



Esta provocará un desplazamiento δ . Al principio este desplazamiento se recuperará íntegramente al sacar la carga horizontal ΔP . se dice entonces que la columna se halla en equilibrio elástico estable ó permanente (Fig. 75a). Al llegar a un valor de altura que llamaremos H_{cr} (crítico) al retirar la carga ΔP no desaparecerá el desplazamiento δ se dice que la columna se halla en equilibrio elástico indiferente (Fig. 75b).

Fig. 74

Si quisiéramos aumentar H mas todavía al colocar posteriormente la carga infinitésima ΔP la columna colapsaría inmediatamente se dice que se halla en equilibrio elástico inestable (Fig. 75c).

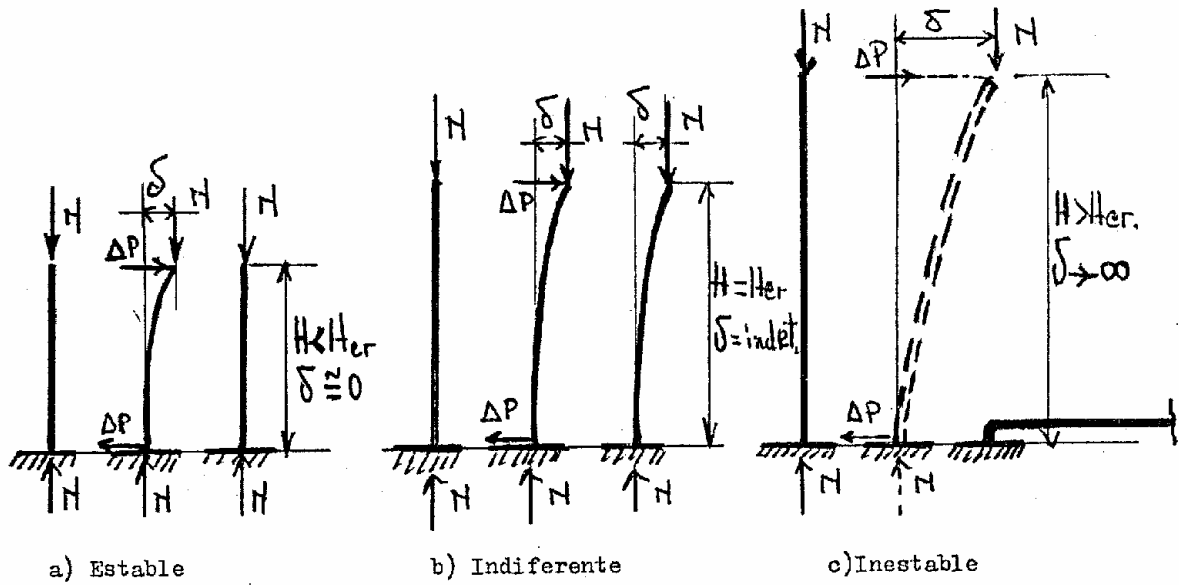


Fig. 75

Para que la interprete mejor el fenómeno se suele recurrir al simil mecánico de la Fig. 76.

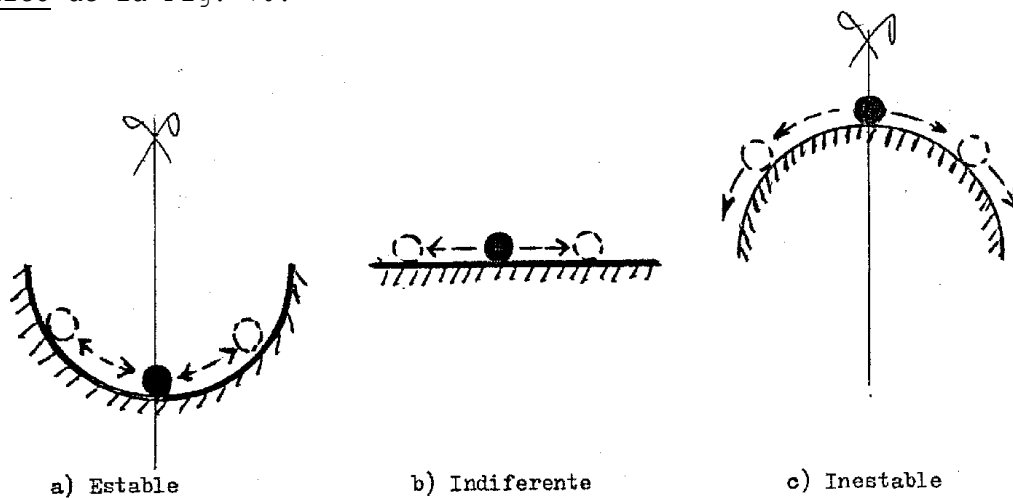


Fig. 76

En el caso 76a la bola sacada de su posición de equilibrio una vez que cesa la causa que la apartó vuelve a la posición original, y esto será así a pesar de las imperfecciones que pueda tener la superficie cóncava o las imperfecciones de la misma bola (falta de homogeneidad del material o de perfección de la superficie esférica). El caso "simil" de la estabilidad elástica esquematizado en la Fig. 75a es cuando la columna que debe soportar el peso N se halla en condiciones tales que cualquier efecto horizontal proveniente de defectos de construcción o falta de homogeneidad

de la pieza, o falta de verticalidad o excentricidad no prevista de la carga no producirá el colapso de la misma.

En el caso de la 76b la bola sacada de su posición de equilibrio una vez que cesa la causa queda en lugar donde aquella la empujó.

El "simil" de la Fig. 75b es cuando la deformación provocada por esa carga horizontal (por más pequeña que sea) es permanente aun al retirar la causa. Es una posición singular única que separa los casos de equilibrio estable de los de equilibrio inestable y como tal muy difícil de materializar en la práctica.

En el caso de la Fig. 76c la bola sacada de su posición de equilibrio seguirá moviéndose en forma cada vez más acelerada aun cuando se haya retirado la causa de su movimiento inicial.

El "simil" de la Fig. 75c nos dice que por el solo hecho de aplicar la carga horizontal infinitésima ΔP la pieza se deformará y colapsará inmediatamente, pero estos casos en la práctica serán imposible que se presenten. En efecto para que la bola de la Fig. 76c esté en equilibrio en esa posición deberá cumplirse que todo deberá ser perfecto (la superficie convexa, la bola del material homogéneo y geoméricamente debe ser una esfera exacta, además deberá estar colocada en el punto más alto y único de la superficie convexa) y por consiguiente cualquier ínfimo detalle que no se cumpla la bola empezará a rodar.

En la figura 75c para que la columna esté en equilibrio deberá estar hecha de un material idealmente perfecto en cuanto a la homogeneidad, la pieza deberá ser geoméricamente perfecta en cuanto a sus dimensiones transversales y en cuanto a su verticalidad y la carga N deberá ser absolutamente vertical y aplicada en el único punto de la sección transversal representado por el centro de gravedad. Cualquier ínfima cosa que no se cumpla es como si apareciera el efecto lateral ΔP que hace colapsar la pieza.

Como conclusión sacamos que para que la pieza esté bien diseñada debe hallarse en equilibrio estable simbolizado en la Fig. 75a. si así no lo estuviera la debemos llevar a ese estado mediante, por ejemplo, el cambio de las dimensiones transversales de la pieza, cambiando condiciones de vínculo, etc. Esto lo veremos más adelante porque hasta aquí hemos hecho una exposición cualitativa y no cuantitativa del fenómeno.

Además hasta ahora hemos expuesto el caso de la columna empotrada en un extremo y libre en el otro (Fig. 73, 74 y 75) pero los casos que se pueden presentar en la práctica son varios y para cada uno de ellos el Hcr es diferente (Fig. 77).

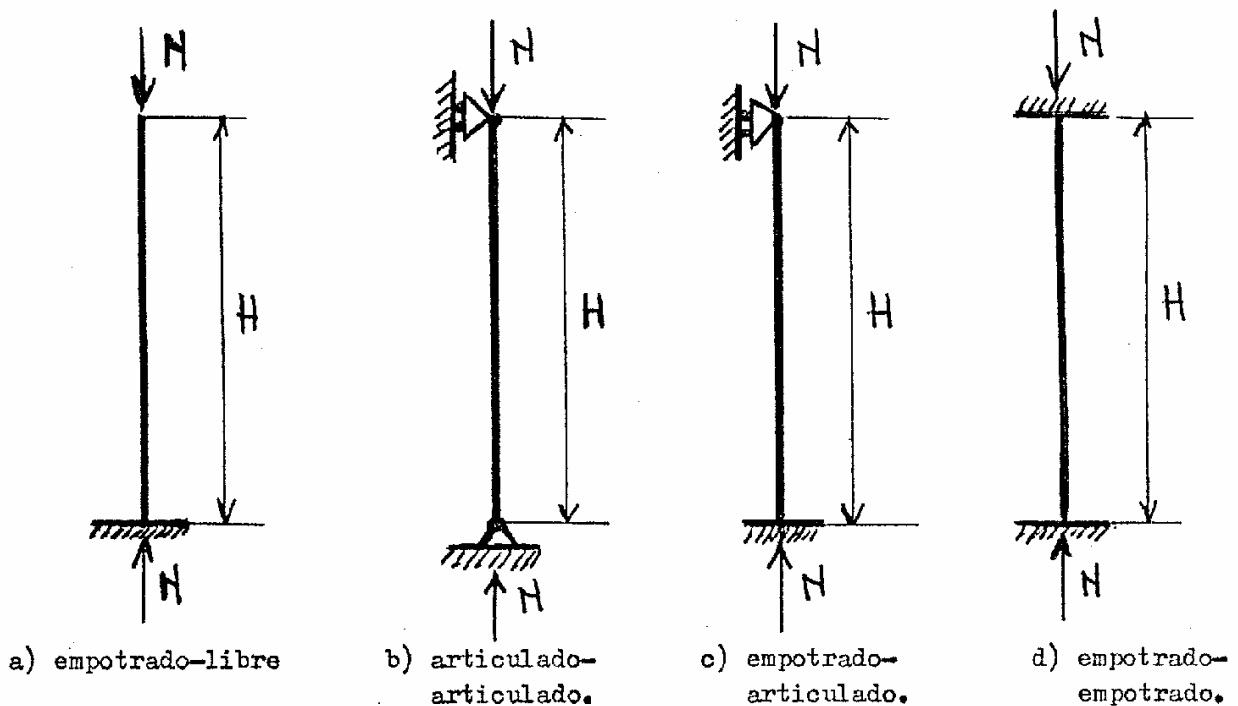


Fig. 77

Si bien los cuatro casos de la Fig. 77 son los que tradicionalmente se consideran en Resistencia de Materiales, el tema en realidad es más amplio y complejo pero el alcance limitado de la materia aconseja este tratamiento.

Antes de finalizar y siempre dentro de la exposición cualitativa del fenómeno es conveniente precisar algunas cosas que podrían inducir a confusión al alumno que leyera el tema en otras bibliografías. Si tuviéramos el cuerpo de la figura 78a cargado excéntricamente con la carga

P e hiciéramos el diagrama de M_f tendríamos (de acuerdo a lo visto en el tema XI) la Fig. 78c pero lo que sucede en la práctica es que el cuerpo se deforma (Fig. 78b), y en consecuencia el diagrama real debería ser el de la Fig. 78d.

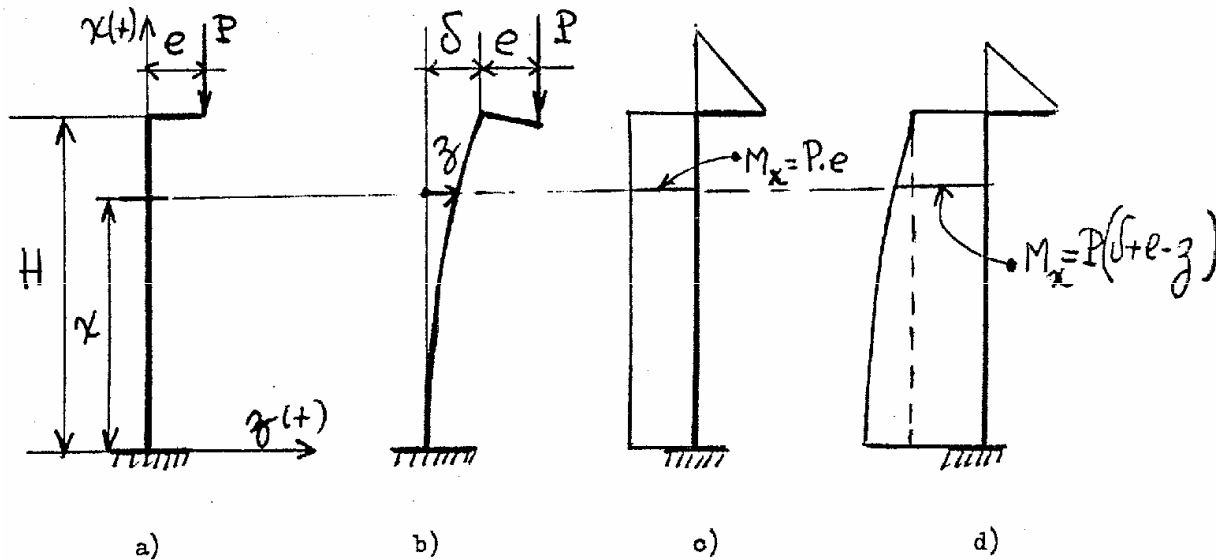


Fig. 78

Pero ya hemos dicho en el tema XIII, punto 1, que las deformaciones deben ser tan pequeñas que no cambie la configuración geométrica del cuerpo y su influencia sobre las solicitaciones deben ser despreciables. Esto significa que en la Fig. 78d los valores δ y z deben ser prácticamente cero lo que haría que en definitiva el diagrama de M_f real fuera el 78c. Esto es lo que normalmente sucede en los sistemas isostáticos que estudiamos en esta materia. Se dice que se aplicó la teoría de "1° orden".

Sin embargo es posible evaluar la influencia de las deformaciones sobre las solicitaciones o sea determinar el diagrama de la Fig. 78d y en ese caso se dice que se ha aplicado la teoría de "2° orden".

Para el tratamiento del pandeo es necesario considerar las deformaciones de 2° orden pero la consideración de estas no significa necesariamente caer en un problema de inestabilidad (o efecto de pandeo).

Finalmente para analizar el problema de la inestabilidad lateral se suelen utilizar dos esquemas:

- a) considerando el caso de la Fig. 74 o el de la Fig. 77b con la carga N centrada y aplicándole luego una fuerza infinitésima ΔP horizontal que provoque una deformación o aplicando una deformación impuesta al cuerpo.
- b) Considerando el caso de la Fig. 78a que es un caso de flexo - compresión.

Hay autores (sobre todo de origen alemán) que dicen que el verdadero pandeo ó equilibrio inestable solamente se puede dar en el primer esquema ya que en el segundo se trata solamente de un problema de tensiones y en último caso si se produce la inestabilidad es porque no se tuvieron en cuenta las deformaciones de "2° orden".

Nosotros siguiendo el libro ya clásico de "Resistencia de Materiales" de S. Timoshenko seguiremos este último esquema porque en el fondo la distinción solo tiene sentido si pudiéramos construir un cuerpo ideal perfecto y sometido a un esfuerzo de compresión perfectamente centrado. En la práctica para el análisis del efecto de pandeo tenemos que considerar también deformaciones ya sea provocados por una carga infinitésima ideal o imponiéndole al cuerpo una deformación compatible con sus vínculos y por consiguiente caemos en un esquema flexo - compresión.-

2.- Fórmula de Euler

Supongamos la Fig. 79; ya hemos visto que el momento flector (M_x) a una determinada altura y considerando las deformaciones de 2° orden será:

$$M_x = - P (\delta + e - z)$$

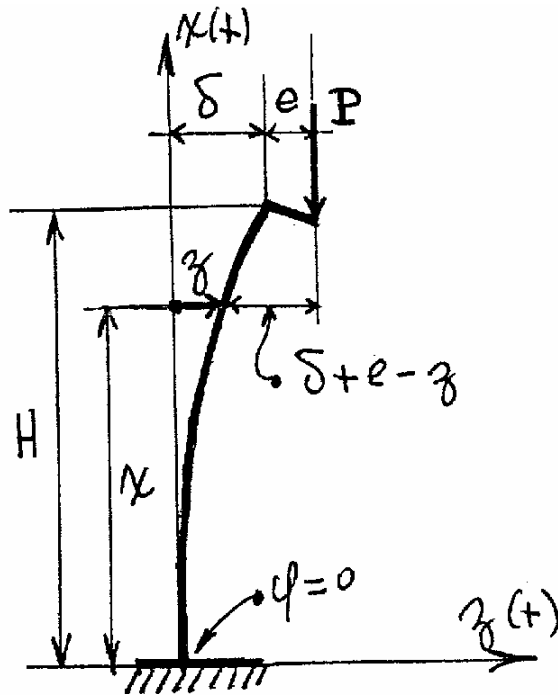


Fig. 79

Aplicando la ecuación diferencial (60)* (ver tema XVII - punto 3) en la que el segundo miembro debemos afectarlo con el signo menos (-) porque el eje z en la Fig. 79 tiene sentido contrario al de la Fig. 40 y de la Fig. 57, tenemos:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = - \frac{M_x}{EI} = \frac{1}{EI} P(\delta + e - z)$$

Si llamamos

$$p^2 = \frac{P}{EI} \quad (105)$$

I = Momento de inercia de la sección con respecto al eje principal de inercia de la misma normal del plano de M_x .

La ecuación diferencial anterior podemos escribirla como

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + p^2 \cdot z = p^2(\delta + e) \quad (106)$$

La solución general de esta será

$$z = C_1 \sin px + C_2 \cos px + \delta + e \quad (107)$$

siendo C_1 y C_2 constantes de integración que debemos hallar mediante las condiciones de "borde" o de vínculos. Estas son:

para $x = 0$ debe ser $z = 0$ luego $C_2 = -(\delta + e)$

para $x = 0$ debe ser $\frac{dz}{dx} = 0 = \psi$

siendo ψ rotación en el empotramiento

Luego $\frac{dz}{dx} = p [C_1 \cos 0^\circ + (\delta + e) \sin 0^\circ]$

entonces $C_1 = 0$

y la (107) será:

$$z = (\delta + e)(1 - \cos px) \quad (108)$$

El valor de δ lo determinamos haciendo $x = H$ en la (108) porque para

$x = H$ debe ser $z = \delta$

$$\text{Luego } \delta = \frac{e(1 - \cos pH)}{\cos pH} \quad (109)$$

y finalmente sustituyendo el valor de δ en (108) tenemos

$$z = \frac{e(1 - \cos px)}{\cos pH} \quad (110)$$

Si analizaremos la (109) y la (110) veríamos que para valores pequeños de pH los valores de δ y z son proporcionales a la carga P [ver fórmula (105)] y es la zona del equilibrio elástico estable pero si pH crece ya no se mantiene la proporcionalidad entre deformaciones (δ y z) y la carga (P) y para:

pH tendiendo a $\pi/2$ $\cos pH$ tiende a 0

y los valores de δ y z tienden a ∞

O sea tenemos deformaciones que tienden a ser infinitas y estamos en el caso de inestabilidad lateral. Por consiguiente el valor límite de pH es $\pi/2$ luego tomando:

$$pH = \frac{\pi}{2} \quad \text{resultará} \quad p^2 = \frac{\pi^2}{4H^2}$$

Y teniendo en cuenta la (105) y llamando a ese valor límite de la carga, por (crítico) resulta

$$\frac{P_{cr}}{EI} = \frac{\pi^2}{4H^2}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4H^2} \quad (111)$$

Es evidente que si tenemos una pieza de un determinado material (E), de una determinada sección (I) y de una determinada altura (H) la (111) nos da la carga máxima que esa pieza puede soportar sin caer en inestabilidad y nos dice que ese valor es independiente de la excentricidad (e). Si en la (111) dividimos ambos miembros por el área (S) de la sección tenemos:

$$\frac{P_{cr}}{S} = \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4H^2 S}$$

Pero el valor $\frac{I}{S} = i^2$ (i = radio de giro)

$$\text{luego resultará:} \quad \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E \cdot i^2}{4 \cdot H^2}$$

Si en lugar de utilizar el esquema empotrado - libre de la Fig. 77a hubiéramos utilizado los otros esquemas de la Fig. 77 se habrían obtenido los siguientes resultados:

$$\text{articulado - articulado} \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{H^2} \quad (113) \quad \text{y} \quad \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E i^2}{H^2} \quad (114)$$

$$\text{empotrado - articulado} \quad P_{cr} = \frac{2\pi^2 EI}{H^2} \quad (115) \quad \text{y} \quad \sigma_{cr} = \frac{2\pi^2 E i^2}{H^2} \quad (116)$$

empotrado - empotrado Por = $\frac{4\pi^2 EI}{H^2}$ (117) y $\sigma_{cr} = \frac{4\pi^2 E I^2}{H^2}$ (118)

El conjunto de las ocho fórmulas (111), (112), (113), (114), (115), (116), (117) y (118) es posible reducirlas a solamente dos si se introduce el concepto de altura de pandeo (H_p) ó longitud de pandeo. Este concepto nace del hecho que tomando como base el caso articulado - articulado y llamando H_p a la altura H de ese caso los demás pueden ser asimiladas a ese tomando como alturas de pandeo (H_p) las indicadas en la Fig. 80.

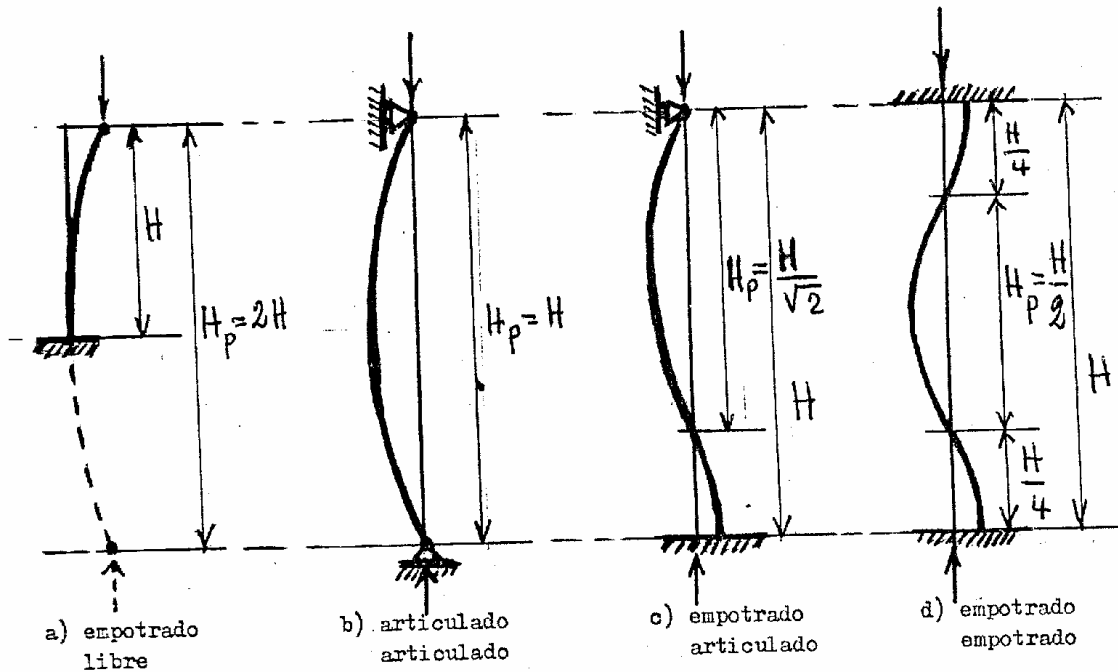


Fig. 80

Luego las fórmulas generales que representarán a los cuatro casos serán:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{H_p^2} \quad (119) \quad \text{y} \quad \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E I^2}{H_p^2} \quad (120)$$

Y en las que H_p hay que tomarla conforme a la Fig. 80. la (120) la podemos transformar en:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{H_p}{L}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{L^2} \quad (121) \quad \text{siendo } L = \frac{H_p}{\lambda}$$

Al valor λ se lo llama "esbeltez" de la pieza. La fórmula (119) es la denominada fórmula de Euler en homenaje al científico alemán que estudió el fenómeno entre los años 1740 y 1760.

3.- Límite de aplicación. Recta de Tetmajer

Todo este estudio físico matemático del pandeo ha sido el resultado de aplicar la ecuación diferencial de la elástica:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{M_f}{EI_{nn}}$$

Pero esta ecuación fue obtenida bajo la hipótesis que el material sigue la ley de Hooke por consiguiente la tensión σ_{cr} dada por la (121) no puede ser superior a la tensión de proporcionalidad σ_p (ver tema XIV - punto 2). Esta tensión para un acero dulce puede ser tomada aproximadamente igual a $\sigma_p = 2.000 \text{ kg/cm}^2$ y conforme a la fórmula (121) corresponde a un $\lambda \cong 100$. Para λ inferiores evidentemente el σ_{cr} no puede ser superior al σ_f (tensión de fluencia) ya que para esa tensión el material presenta grandes deformaciones. La σ_f para el mismo acero anterior es aproximadamente $\sigma_f = 2.400 \text{ Kg/cm}^2$. Entre la σ_p y la σ_f el material no cumple con la ley de Hooke y por consiguiente no es aplicable la fórmula de Euler y la tensión crítica σ_{cr} en base a experiencias se la toma como en la Fig. 81 en la que se grafica σ_{cr} en función de λ y que presenta las siguientes características:

para $\lambda \leq 60 \rightarrow \sigma_{cr} = \sigma_f = 2.400 \text{ Kg/cm}^2$

para $60 \leq \lambda \leq 100$

σ_{cr}

σ_{cr} está representada por una recta llamada recta de Tetmajer y

$2.000 \text{ kg/cm}^2 \leq \sigma_{cr} \leq 2.400 \text{ Kg/cm}^2$

para $\lambda \geq 100 \rightarrow$

$\sigma_{cr} \rightarrow$ fórmula de Euler

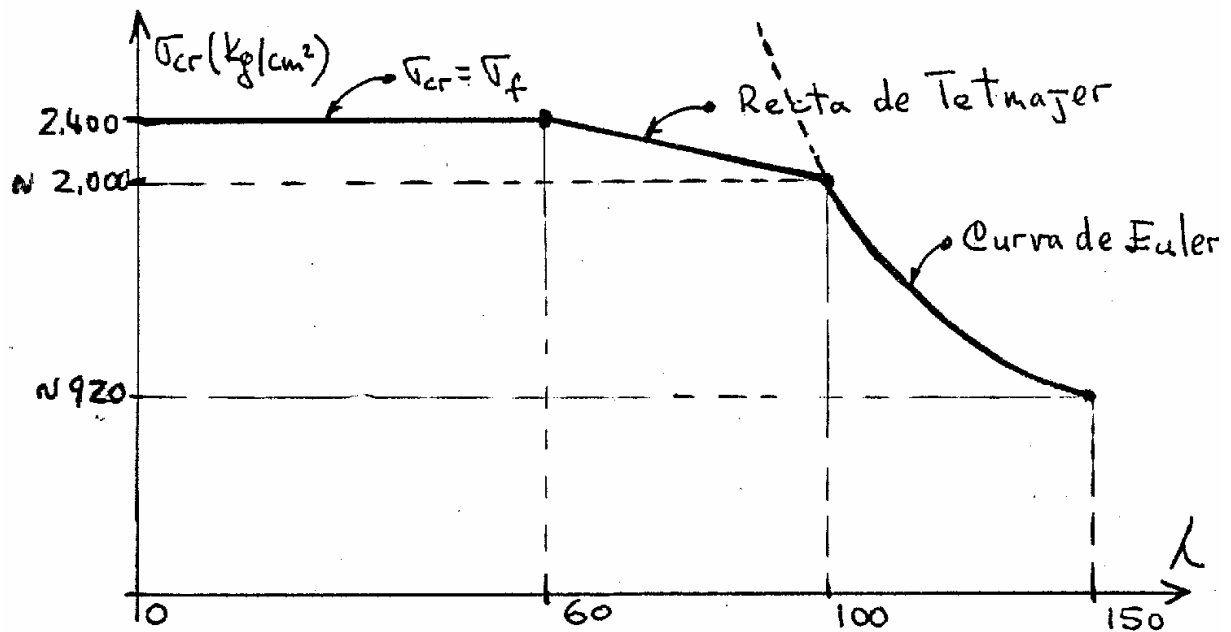


Fig. 81

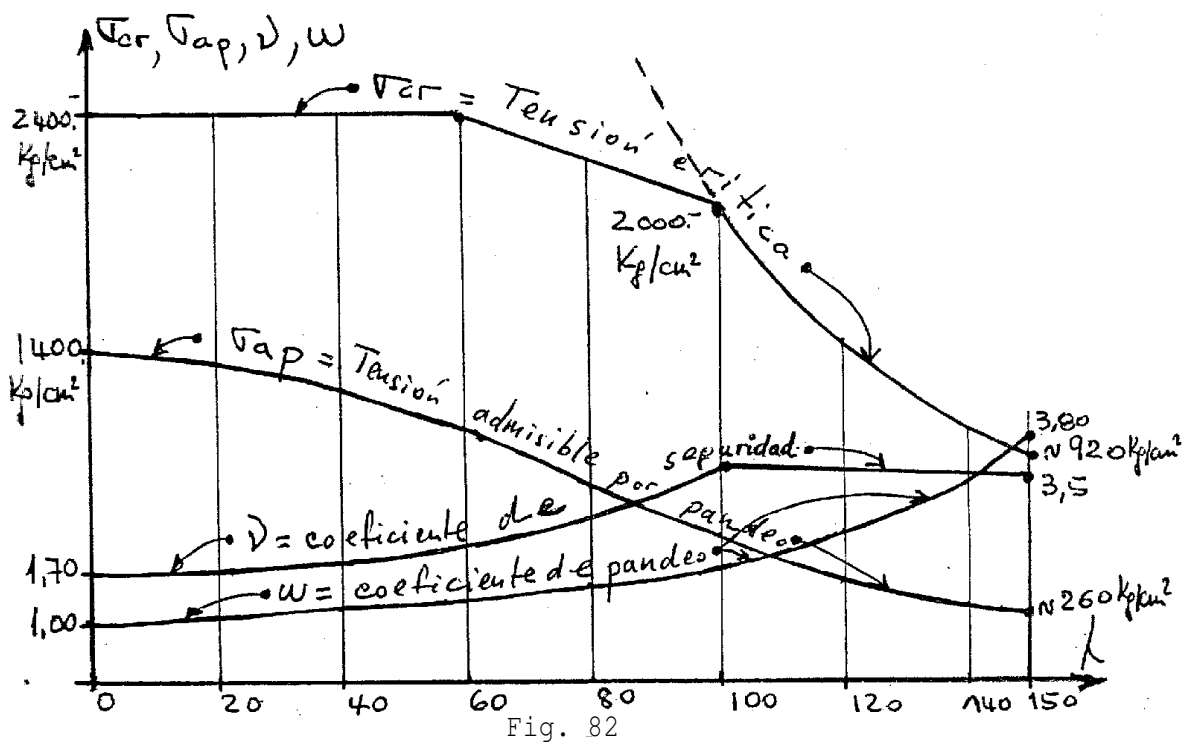
4.- Coeficiente de seguridad. Tensiones admisibles. Coeficientes omega (ω) de pandeo. Aplicaciones.

En la Fig. 81 se ha consignado el σ_{cr} en función de la esbeltez λ pero esa es una tensión de rotura, es decir que en el caso que llegara a tener ese valor el cuerpo tendría deformaciones excesivas o colapsaría.

Luego la tensión de trabajo o "admisibles" deben ser menores y las obtenemos dividiendo el σ_{cr} por el coeficiente de seguridad γ (ver tema XIV - punto 6 "Tensiones admisibles. Coeficientes de seguridad").

El coeficiente de seguridad en el pandeo es variable en función también de λ . En la Fig. 82 se consigna nuevamente para un cuerpo constituido por acero dulce el σ_{cr} , el coeficiente de seguridad γ y las "tensiones admisibles por pandeo" σ_{ap} que resultan de aplicar la siguiente relación:

$$\sigma_{ap} = \frac{\sigma_{cr}(\lambda)}{\gamma(\lambda)} \quad (122)$$



Finalmente en la práctica trabajar con tantas tensiones admisibles para el mismo material resulta engorroso y puede llevar a confusiones. Ya hemos dicho que normalmente no se presenta el problema de pandeo. Es el caso de los cuerpos trabajando preponderantemente a tracción y a flexión (ejemplo: losas, vigas, etc.). el pandeo es importante en el caso de los

cuerpos trabajando preponderantemente a compresión (ejemplo: columnas). Pero aún en estos casos no siempre hay problemas de pandeo.

Luego es conveniente trabajar con una sola tensión admisible que para el caso de acero común que estamos viendo es:

$$\sigma_{ad} = 1.400 \text{ kg/cm}^2$$

Para la consideración del pandeo se suele introducir un coeficiente omega de pandeo tal que:

$$\omega = \omega(\lambda) \quad (123)$$

Este coeficiente resulta de la siguiente relación:

$$\omega = \frac{\sigma_{ad}}{\sigma_{ap}} \quad \text{por lo que siempre será } \omega \geq 1$$

o también

$$\sigma_{ap} = \frac{\sigma_{ad}}{\omega} \quad (124)$$

Este coeficiente ω se halla graficado también en la Fig. 82 para el caso del acero común. Además para los distintos materiales y tipo de secciones este coeficiente ω se halla tabulado en bibliografías o manuales. No olvidemos que $\omega = \omega(\lambda)$ y $\lambda = \frac{H_p}{I}$

e I depende de la forma de la sección.

5.- Aplicaciones

Supongamos una columna como la de la figura 83.

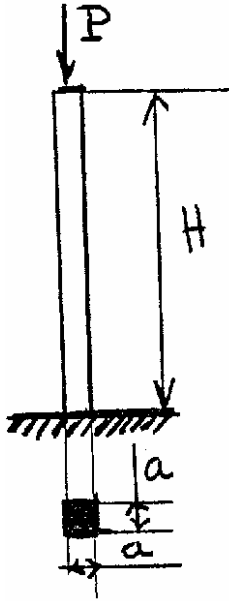


Fig. 83

P = dato del problema

Forma de la sección: cuadrada

H = dato del problema

Material del cuerpo \rightarrow acero común

Debo dimensionar la pieza o sea determinar la sección $S = a \cdot a$ o sea debo hallar el valor de a

Sabemos que

$$S = a \cdot a = a^2 = \frac{P}{\sigma_{ap}} \quad \text{pero por la (124)} \quad \sigma_{ap} = \frac{\sigma_{ad}}{W}$$

$$\text{Luego} \quad S = a^2 = \frac{W \cdot P}{\sigma_{ad}} \quad (125)$$

La (125) nos está diciendo que el coeficiente W de pandeo actúa como un coeficiente de mayoración de la carga P manteniéndose la tensión admisible constante e igual al del material para los casos en que no hay problemas de pandeo. Ya sabemos que para el acero común el $\sigma_{ad} = 1.400 \text{ Kg/cm}^2$.

Para hallar W en bibliografías y tablas debemos entrar con el tipo de material y de función de λ . Para nuestro caso:

$$\lambda = \frac{H_p}{i}$$

$$H_p = 2H \quad (\text{de fig. 83})$$

$$i = \sqrt{\frac{I}{S}}$$

$$I = \frac{a \cdot a^3}{12} = \frac{a^4}{12}$$

$$S = a \cdot a = a^2$$

Pero a nos es desconocido, luego debemos predimensionar o sea dar un valor a , hallar λ y luego ω y mediante la (125) hallar P que llamaríamos P_c (de cálculo).

Se debe verificar:

$$P_c \geq P \quad (\text{dato}) \quad (126)$$

Si esto no se verifica debo aumentar el valor de a y volver a calcular un segundo P_c hasta que se cumpla la inecuación (126).

En la práctica se darán más aplicaciones.-