

1.- Torsión. Momento de Torsión

En un caso más general, puede suceder que el plano del Momento, determinado por el momento resultante de todos los momentos de las fuerzas de la izquierda con respecto al centro de gravedad de la sección, no sea normal a ésta. Será posible entonces, descomponer ese momento, uno contenido en un plano normal a la sección que nos dará un momento flector (flexión normal y oblicua) y otro en el plano de la sección que nos dará un momento torsor (o de torsión). En la Fig. 65 se muestra el caso en el que el  $M_f$  da una flexión normal:

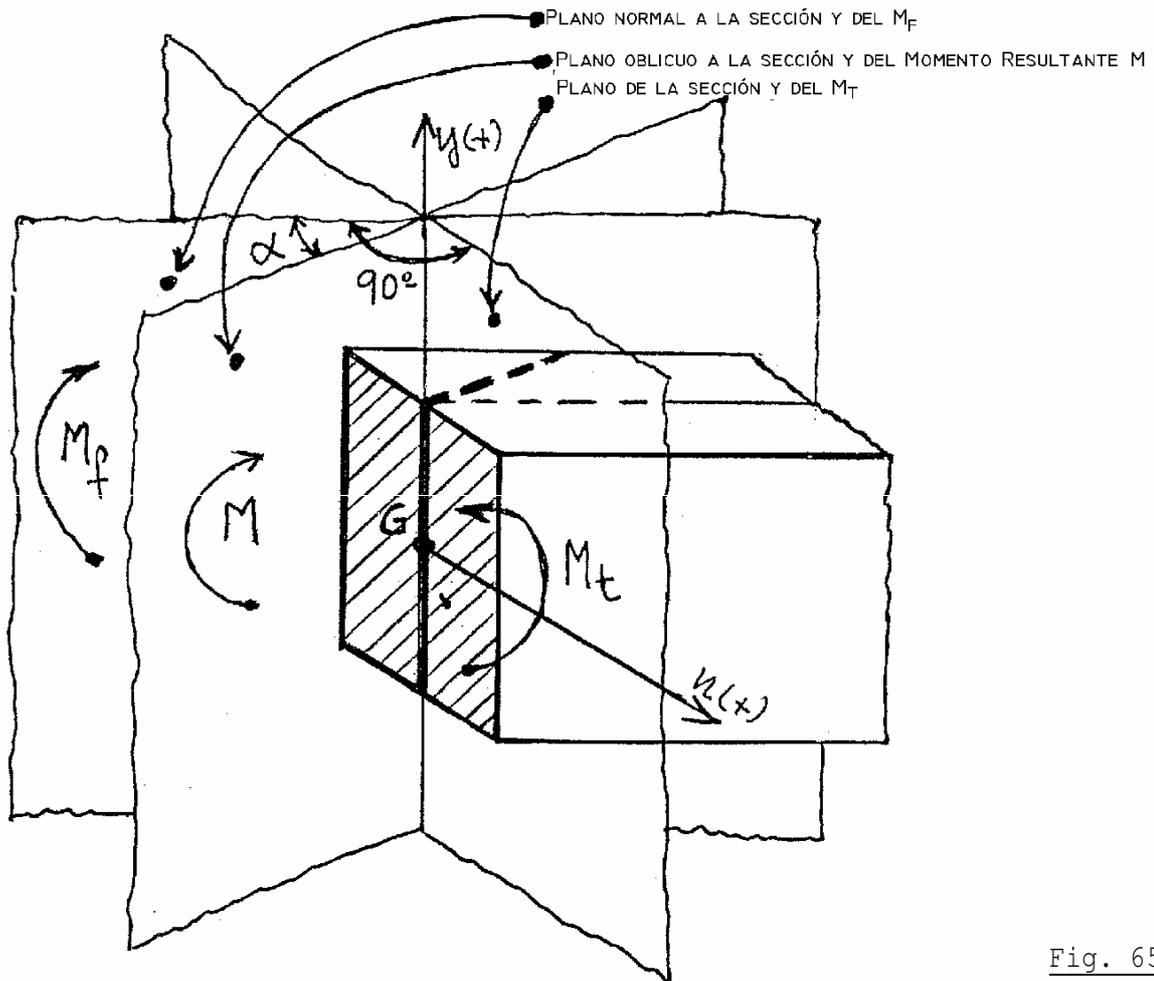


Fig. 65

Aquí veremos solamente la torsión simple en la que:

$$\begin{aligned} N &= 0 \\ M_f &= 0 \\ Q &= 0 \\ M_t &\neq 0 \end{aligned}$$

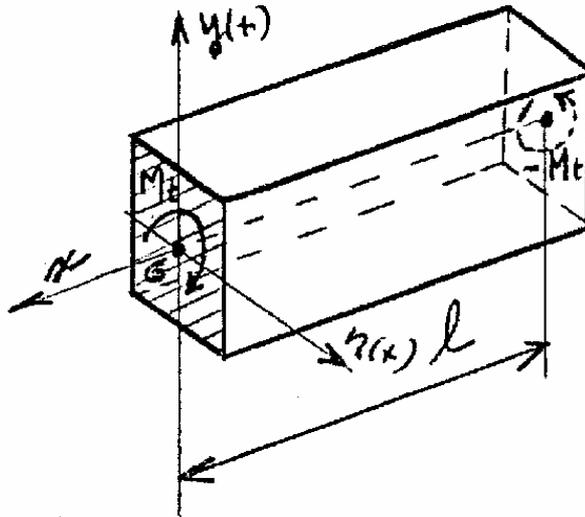


Fig. 66

Es un caso que muy difícilmente se produce en la práctica igual que el de corte simple visto en el tema XV. Normalmente la torsión viene acompañada de flexión y corte.

En cuanto a las tensiones provocadas por la torsión deben, eventualmente, sumarse vectorialmente a las provocadas por el esfuerzo de corte constituyendo las tensiones tangenciales (ver tema XIX).

## 2.- Momento resistente. Angulo de torsión y ángulo de hélice. Tensiones de torsión.

Supongamos, entonces, el cuerpo cilíndrico de la Fig. 67 de diámetro  $D$ , empotrado en uno de sus extremos y sometido en el otro a la acción de un momento torsor  $M_t$ . Por reacción en el empotramiento se desarrollará un momento torsor reactivo ( $-M_t$ ) y si hiciéramos el diagrama de momentos torsores tendríamos el de la figura 68.-

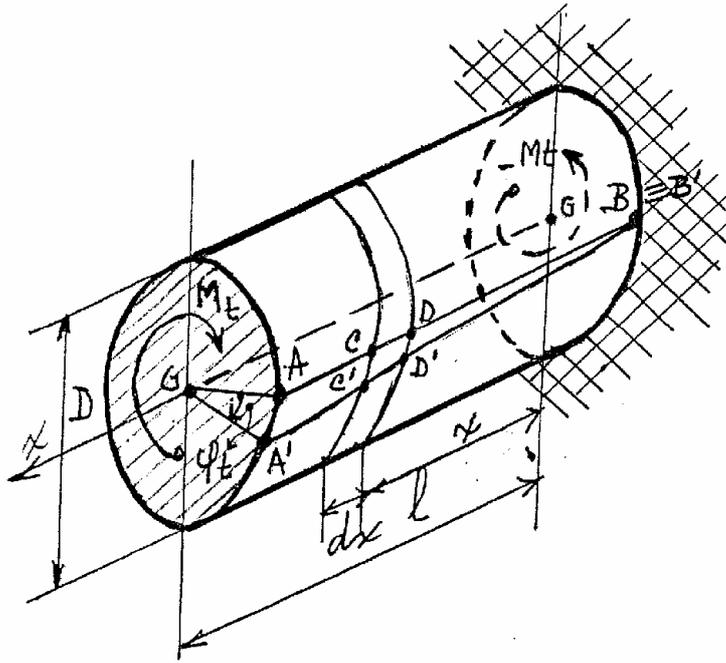


Fig. 67

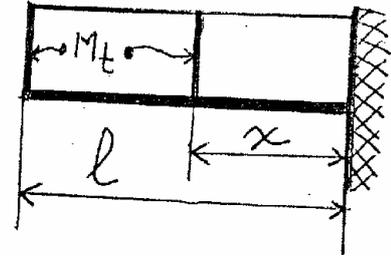
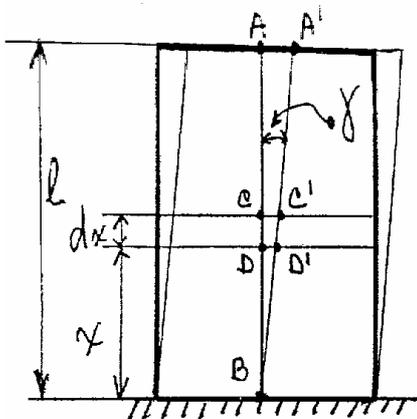


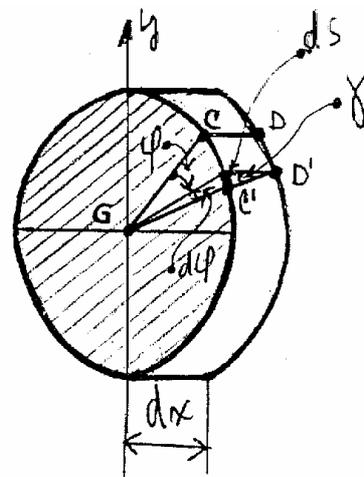
Fig. 68: Diagrama de  $M_t$

Por efecto del momento torsor, el radio GA de la superficie cilíndrica extrema gira hasta ocupar la posición GA'. El ángulo de giro  $\psi_t$  es el ángulo de torsión.

Una generatriz como la AB por efecto del mismo momento de torsión pasaría a ocupar la posición A'B formando una hélice sobre la superficie cilíndrica. Si se desarrollara en un plano esta superficie tendríamos que la hélice se convierte en una recta con un ángulo de inclinación  $\gamma$  llamado ángulo de la hélice (Fig. 69a).



a) Ángulo de la hélice



b) Disco del cuerpo cilíndrico

Fig. 69

Si ahora considero un disco del cuerpo cilíndrico de espesor  $dx$ , se podría comprobar que, siempre que las deformaciones (el ángulo de torsión  $\psi$ ) sean pequeñas, además de cumplirse la hipótesis de Navierre se verifica que las secciones permanecen circulares y sus diámetros y las distancias entre ellas no cambian.

$$ds = \frac{D}{2} \cdot d\psi \quad \text{y} \quad ds = \gamma dx$$

Igualando

$$\gamma = \frac{1}{2} D \cdot \frac{d\psi}{dx} \quad (91)$$

La (91) nos dice que  $\frac{d\psi}{dx}$  es una constante y representa el ángulo de torsión por unidad de longitud de la pieza.

Este ángulo que simbolizaremos con  $\theta$  es el ángulo específico de torsión y la (91) podemos escribirla como

$$\gamma = \frac{1}{2} D \cdot \theta \quad (92)$$

El momento torsor producirá en el cuerpo tensiones de torsión. Considerando la superficie donde está aplicado el  $M_t$  analicemos dos anillos de la misma, uno exterior y otro interior. Por efecto del Momento el punto  $A$  pasará a  $A'$  y el punto interior  $a$  a  $a'$  (Fig. 70a). Aquí también se cumple la ley de Hooke por lo que las tensiones de torsión serán proporcionales a esos desplazamientos y por consiguiente resultará el diagrama de la Fig. 70b.

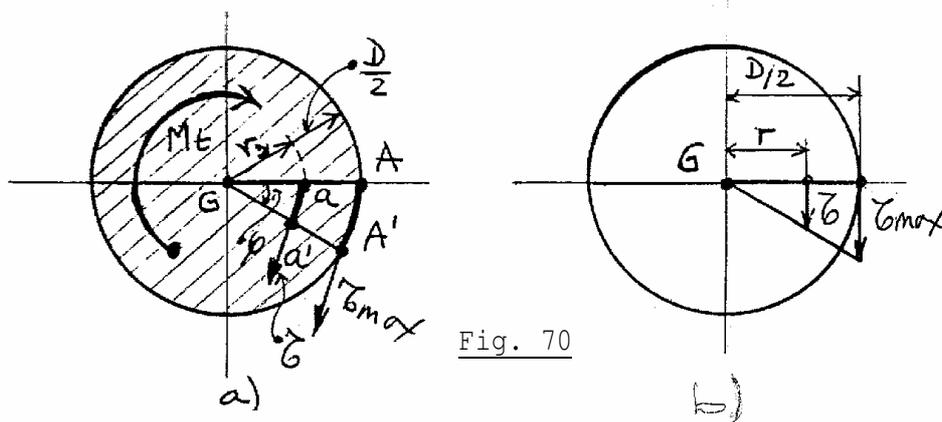
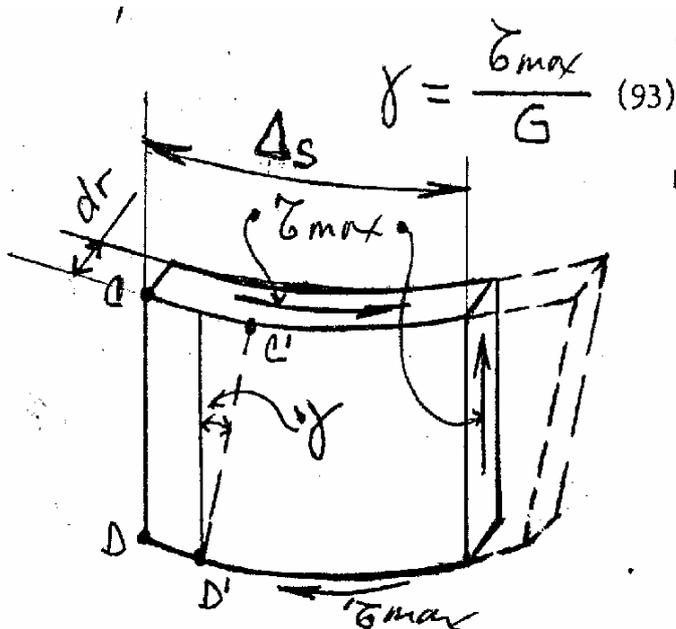


Fig. 70

Si ahora consideramos un elemento de la superficie exterior de espesor  $dr$  y determinado por dos generatrices próximas separadas por un valor  $\Delta s$  y por dos círculos exteriores separados de un valor  $dx$ , teniendo en cuenta la Fig. 67 y Fig. 69b y Fig. 71 y la fórmula (41) vista en el tema XV - punto 2, al tratar el módulo de la elasticidad transversal, tenemos:



Siendo  $G$  = Módulo de elasticidad transversal ( $\text{kg/cm}^2$ )

Fig. 71

Igualando con la (92)

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot G \cdot \theta \quad (94)$$

De la Fig. 70b resultará que

$$\frac{\tau_{\max}}{G} = \frac{D/2}{r} \rightarrow \tau = 2 \frac{r}{D} \tau_{\max} \quad (95)$$

Teniendo en cuenta la Fig. 72 y aplicando la condición mecánica de equilibrio deberá verificarse que:

$$dM_t = \underbrace{2\pi r \cdot dr \cdot \tau}_{\text{Fuerza}} \cdot \underbrace{r}_{\text{brazo de palanca}}$$

$$M_t = \int_0^{D/2} 2\pi \cdot r^2 \cdot \tau \cdot dr$$

Y

XX

Y reemplazando  $\tau$  por la fórmula (95) resulta

$$M_t = \frac{2 \tau_{max}}{D} \int_0^{D/2} 2\pi r^3 dr \quad (96)$$

al valor

$$I_p = \int_0^{D/2} 2\pi r^3 dr = \frac{\pi D^4}{32}$$

se lo denomina momento de inercia polar (ver tema XII)

luego la (96) se transforma en

$$M_t = \frac{2}{D} \tau_{max} \cdot I_p \quad (97)$$

luego

$$\tau_{max} = \frac{M_t \cdot D}{2 \cdot I_p} \quad (98)$$

Y la (95) se transforma en:

$$\tau = \frac{M_t \cdot r}{I_p} \quad (99)$$

Por otro lado la (93) nos dará:

$$\gamma = \frac{D}{2} \cdot \frac{M_t}{G \cdot I_p} \quad (100)$$

y de la (92) despejando  $\theta$  y teniendo en cuenta la (100)

resulta:

$$\theta = \frac{M_t}{G \cdot I_p} \quad (101)$$

Finalmente

$$\varphi_t = \int_0^l \frac{d\varphi}{dx} dx = \theta \int_0^l dx = \theta \cdot l$$

Y

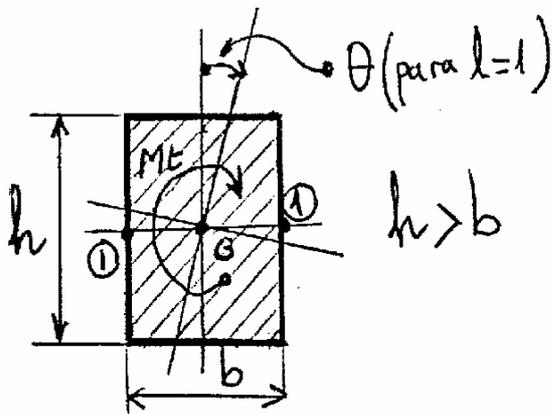
$$\psi_t = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p} \quad (102)$$

La (102) tiene la misma forma de la ley de Hooke "El ángulo de torsión ( $\psi_t$ ) es directamente proporcional al momento torsor ( $M_t$ ), a la longitud de la pieza ( $l$ ) e inversamente proporcional al módulo de elasticidad transversal ( $G$ ) y al momento de inercia polar ( $I_p$ )".

Si la sección en vez de ser circular fuera rectangular o de cualquier otra forma la solución del problema y las fórmulas para la determinación de las tensiones y de las deformaciones [fórmulas (98), (99), (100), (101) y (102)] no serán tan simples.

Aquí daremos información solamente sobre el caso de la sección rectangular (Fig. 65 y Fig. 66).

En este caso si llamamos  $h$  al mayor de los lados del rectángulo (Fig. 72) tendremos que:



$$\tau_{max} = \frac{M_t}{\alpha \cdot h \cdot b^2} \quad (103)$$

$$\theta = \frac{M_t}{\beta \cdot h \cdot b^3 \cdot G} \quad (104)$$

Fig. 72

La (103) nos da la tensión de torsión máxima y esta se producirá en los puntos ① ubicados en la mitad del lado mayor y en la fibra externa de la sección. Por otro lado la (104) nos da el ángulo específico de torsión

(para  $l = 1$ ). Las constantes  $\alpha$  y  $\beta$  la obtendremos del siguiente cuadro:

$\frac{h}{b}$	1,00	1,50	1,75	2,00	2,50	3,00	4,00	6,00	8,00	10,0 0	$\infty$
$\alpha$ =	0,20 8	0,23 1	0,23 9	0,24 6	0,25 8	0,26 7	0,28 2	0,29 9	0,30 7	0,31 3	0,33 3
$\beta$ =	0,14 1	0,19 6	0,21 4	0,22 9	0,24 9	0,26 3	0,28 1	0,29 9	0,30 7	0,31 3	0,33 3

Para valores intermedios de h/b se puede interpolar.