

MECÁNICA TÉCNICATEMA XVIII1º) Vigas de eje recto

En el tema XI se definieron y estudiaron las vigas de alma llena, también se vio que estas vigas las podemos representar por medio de sus ejes que son los lugares geométricos que unen los centros de gravedad de todas las secciones de la viga. Si esos ejes son curvos (ver Fig. 10) tenemos vigas curvas pero si son rectos (ver Fig. 37, 40, 43 y 51) tenemos las vigas de ejes rectos y que son más comunes en la práctica.

2º) Cálculo de Vigas de ejes reales

Ya hemos visto al iniciar el estudio de "resistencia de Materiales" que el objeto de la misma es "llegar a dimensionar los cuerpos de manera tal que las tensiones o deformaciones provocadas por los esfuerzos al que están sometidos se mantengan dentro de ciertos límites dados por las experiencias y las experimentaciones hechas sobre los mismos o sobre modelos que los representan" [ver punto 1) del tema XIII].

Ahora estamos en condiciones de precisar un poco más lo que se expresó allí.

En efecto en el caso específico que estamos tratando y que es el de las vigas de eje recto, las tensiones deberán cumplir que:

$$\sigma_t \leq \sigma_{ad}$$

$$\tau_t \leq \tau_{ad}$$

siendo

$\sigma_t$  = tensión normal de trabajo

$\sigma_{ad}$  = tensión normal admisible conforme al material

$\tau_t$  = tensión tangencial de trabajo

$\tau_{ad}$  = tensión tangencial admisible conforme al material

Una vez resuelta la estructura (o viga) y hallamos los diagramas de  $M_f$ ,  $Q$  y  $N$  (tema IX y tema XI) se procederá al dimensionado o verificación de la misma según el estado de sollicitación más desfavorable obtenido.

Esto se hace hallando las tensiones máximas de trabajo ( $\sigma_t$  y  $\tau_t$ ) aplicando por ejemplo la fórmula (51), la fórmula (59) en al que se toma  $M_f = M_{fmax}$  y las coordenadas  $\underline{n}$  e  $\underline{y}$  máximas o la fórmula (53)\* según sea el caso y siempre que se trata de flexión simple o flexión plana.

Finalmente se verifican las fórmulas (55)\*. Pero si hiciéramos solamente lo anterior estaríamos controlando tensiones pero no las deformaciones y ya hemos visto que una de las condiciones básicas de la Resistencia de Materiales es que las deformaciones sean pequeñas (muy pequeñas) de manera tal que no cambie la configuración geométrica del cuerpo o viga. En el punto siguiente veremos como se miden y por consiguiente controlan esas deformaciones.

### 3º) Deformaciones. Ecuación diferencial de la elástica. Flechas y rotaciones

Consideremos nuevamente la viga de la Fig. 40 sometida a un sistema de cargas como el de la fig, 37 o Fig. 51. si la representamos por medio de sus ejes y la referimos a las coordenadas generales  $x - z$  tendremos las figs. 57 a y 57 b.

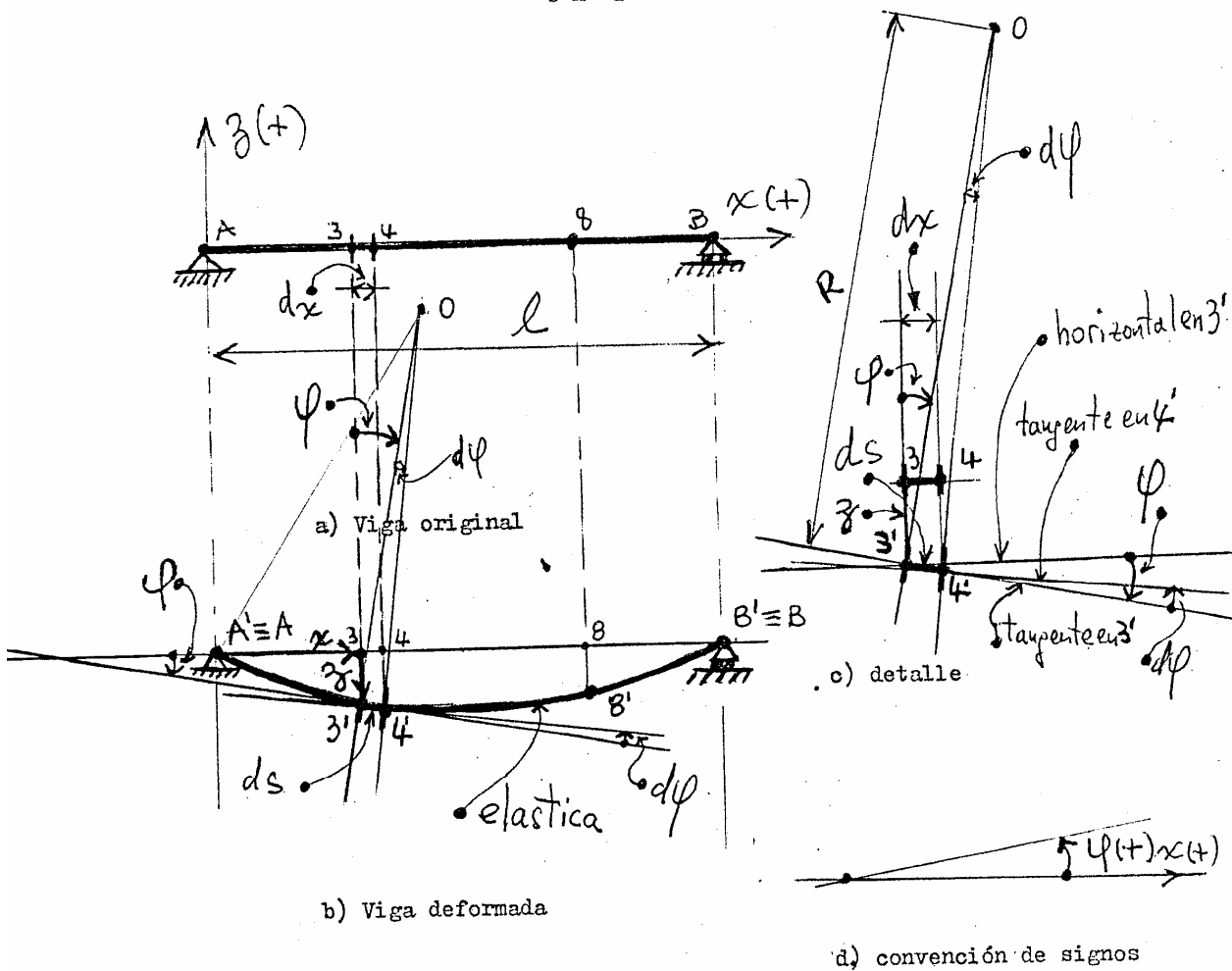


Fig. 57

En las Fig. 57a y 57b podemos ver que el punto 3, centro de gravedad de la sección de la viga (ver Fig. 40) sufre un desplazamiento vertical pasando a ocupar la posición  $3'$  y el segmento  $33'$  que hemos acotado como  $z$  se lo denomina flecha.

El punto 3 sufre también un desplazamiento horizontal que es absolutamente despreciable comparado con el vertical y que por consiguiente no se lo tiene en cuenta. El lugar geométrico que los puntos originales (como  $A$ ,  $3$ ,  $4$ ,  $8$  y  $B$ ) pasan a ocupar después de la deformación de la viga (y que son  $A'$ ,  $3'$ ,  $4'$ ,  $8'$  y  $B'$ ) se lo denomina elástica. La sección de la viga que en la posición original contenía al punto 3, además de desplazarse, gira un cierto ángulo  $\varphi$  que se denomina rotación y que ocupará la nueva posición con  $3'$  como centro de gravedad (ver Fig. 40).

El elemento de viga de longitud  $dx$  sufre un desplazamiento y deformaciones de modo tal que entre las secciones que tienen centro de gravedad de 3 y 4 (o 3' y 4') se producen una rotación relativa de  $d\psi$  y que hemos visto también en la Fig. 40.

De la Fig. 57c

$$d\psi = \frac{ds}{R} \rightarrow \frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{R}$$

Pero por condición básica de Resistencia de Materiales las deformaciones deben ser muy pequeñas y en consecuencia el ángulo  $\psi$  es un infinitésimo y entonces podemos hacer la simplificación de tomar.

$$ds \cong dx$$

luego 
$$\frac{d\psi}{ds} \approx \frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{R} \quad (56)^*$$

por otro lado de la fórmula (59), (ver punto 3 del tema XVI) resulta también que:

$$\frac{1}{R} = \frac{M_f}{E \cdot I_{nn}} \quad (57)^*$$

Igualando las formulas (56)\* y (57)\* tenemos:

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{M_f}{E \cdot I_{nn}} \quad (58)^*$$

De la figura 57b y de la convención de signos (Fig. 57d) podemos ver que

$$\text{tag } \psi = \frac{dz}{dx}$$

y por la razón anteriormente expresada ( $\psi$  es un infinitésimo) podemos tomar:

$$\text{tag } \psi \cong \psi = \frac{dz}{dx} \quad (59)^*$$

Finalmente teniendo en cuenta la (58)\*

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dx} = \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{M_f}{EI_{nn}}$$

O sea 
$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{M_f}{EI_{nn}} \quad (60)^*$$

La (60)\* es la denominada ecuación diferencial de la elástica. Es una solución aproximada por las simplificaciones hechas. Es posible obtener también una solución más exacta pero en general la (60)\* es suficiente para los casos que se tratan en la práctica.

En consecuencia resolviendo la ecuación diferencial (60)\* es posible hallar los valores de los desplazamientos z o flechas y resolviendo la ecuación diferencial (59)\* es posible hallar los valores de los giros  $\psi$  o rotaciones.

La resolución de las ecuaciones diferenciales (59)\* y (60)\* implicará la introducción de constantes de integración que deberemos hallar mediante las "condiciones de borde" de cada problema específico como se verá en la práctica.

#### 4°) Teorema de Mohr

Lo trataremos brevemente. Este teorema nos da un procedimiento alternativo a la resolución de las ecuaciones diferenciales (59)\* y (60)\*.

En efecto: supongamos la viga de la fig. 58a sometida a un sistema de cargas cualesquiera y que hemos hallado su diagrama de  $M_f$  (Fig. 58b) mediante el procedimiento analítico o gráfico ya visto.

Si ahora cargamos la viga que estamos estudiando con un sistema de cargas igual al diagrama de  $M_f$  dividido por las constantes E e  $I_{nn}$  (en un caso general  $I_{nn}$  podría ser variable y el razonamiento es el mismo) llamado "diagrama de momentos reducido" como se ve en la Fig. 58c demostramos que las reacciones en A y B que se obtienen con este sistema de cargas ficticias son respectivamente la rotación de A cambiada de signo y la rotación en B, que el  $M_f$  ficticio en un punto de ordenada  $x_1$  es la flecha de la elástica en ese punto y que el esfuerzo de corte (Q) ficticio en el mismo punto de ordenada  $x_1$  es la rotación de la sección en ese punto cambiada de signo. O sea que cargando la viga con el diagrama de momentos flectores reducidos resultará:

$$\psi_A = -R_A^*$$

$$\psi_B = R_B^*$$

$$z = M_f(x=x_1)$$

$$\varphi = -Q(x=x_1)$$

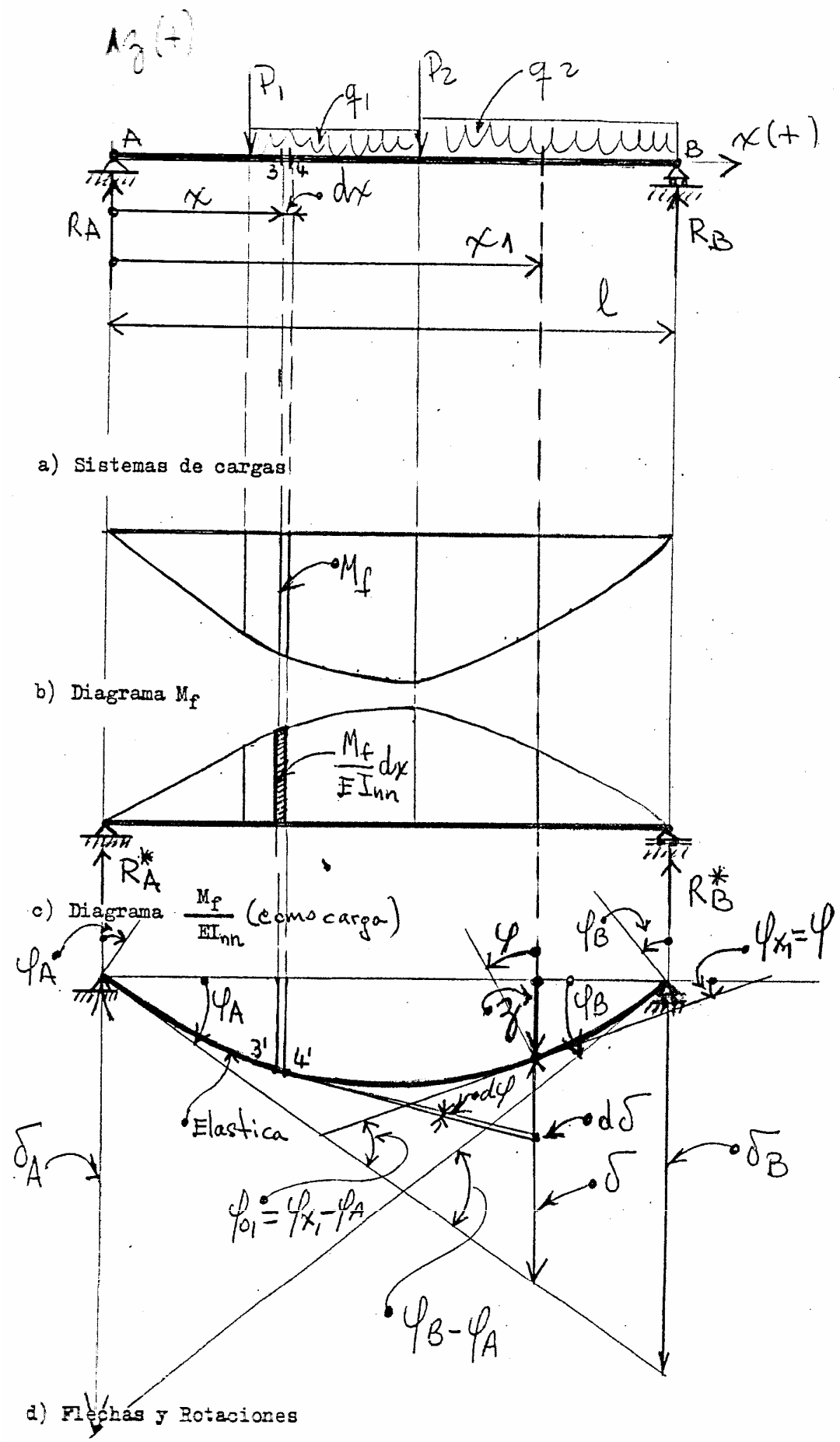


Fig. 58

De la fórmula (58)\* y teniendo en cuenta la Fig. 58d

$$d\varphi = \frac{M_f}{EI_{un}} dx$$

Luego

$$\varphi_{01} = \varphi_{x_1} - \varphi_A = \varphi - \varphi_A = \int_0^{x_1} \frac{M_f}{EI_{un}} dx \quad (61)*$$

Además de la misma Fig. 58d

$$d\delta = d\varphi(x_1 - x) = \frac{M_f}{EI_{un}} (x_1 - x) dx$$

Y luego

$$\delta = \int_0^{x_1} d\varphi(x_1 - x) dx = \int_0^{x_1} \frac{M_f}{EI_{un}} (x_1 - x) dx \quad (62)*$$

De la fórmula (61)\* si  $x_1 = l$

$$\varphi_{01} = \varphi_B - \varphi_A = \int_0^l \frac{M_f}{EI_{un}} dx \quad (63)*$$

La (63)\* nos dice que la rotación relativa entre el apoyo A y el apoyo B

es igual a  $\varphi_B - \varphi_A$  (recordemos que por convención  $\varphi_A$  es negativa) es la superficie del diagrama de momentos flectores reducidos.

De la fórmula (62)\* para  $x_1 = l$

$$\delta = \delta_B = \int_0^l \frac{M_f}{EI_{un}} (l - x) dx \quad (64)$$

Por tratarse de ángulos (rotaciones) infinitésimos podemos escribir

$$-\varphi_A = \frac{\delta_B}{l} = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{M_f}{EI_{un}} (l - x) dx \quad (65)$$

La (65) nos dice que si consideramos el diagrama de  $\frac{M_f}{EI_{un}}$  como carga ficticia de la viga (Fig. 58c) la rotación en el apoyo A de la viga de Fig. 58a es la reacción ficticia  $R_A^*$  de la viga de Fig. 58c cambiada de signo; o sea:

$$R_A^* = -\varphi_A = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{M_f}{EI_{un}} (l - x) dx \quad (66)$$



En efecto, tomando momentos de la carga ficticia variable  $\frac{M_f}{EI_{nn}}$  y  $R_A^*$  con respecto al apoyo B de la viga de Fig. 58c obtenemos la ecuación (66) o lo que es lo mismo la (65). Por otro lado debe cumplirse en el caso de la figura 58c que las reacciones ficticias  $R_A^*$  y  $R_B^*$  deben cumplir que:

$$R_A^* + R_B^* = \int_0^l \frac{M_f}{EI_{nn}} \cdot dx$$

Y reemplazando  $R_A^*$  por la (66) resultará

$$R_B^* = \int_0^l \frac{M_f}{EI_{nn}} dx - \frac{1}{l} \int_0^l \frac{M_f}{EI_{nn}} (l-x) dx = \int_0^l \frac{M_f}{EI_{nn}} dx + \psi_A \quad (67)$$

pero de la (63)\* obtenemos

$$\psi_B = \int_0^l \frac{M_f}{EI_{nn}} dx + \psi_A \quad (68)$$

Comparando la (67) y la (68) concluimos que la rotación ( $\psi_B$ ) en el apoyo B de la viga de Fig. 58a es la reacción ficticia  $R_B^*$  de la viga de Fig. 58c.

Si ahora miramos nuevamente la Fig. 58b podemos decir además que:

$$z = \psi_A \cdot x_1 + \delta$$

Y reemplazando valores de

$$\psi_A = -R_A^* \cdot \delta \quad \text{De la formula (64)}$$

Resulta

$$z = -R_A^* \cdot x_1 + \int_0^{x_1} \frac{M_f}{EI_{nn}} (x-x_1) dx \quad (69)$$

La (69) nos dice que la flecha (z) de la viga 58a en el punto de abscisa  $x_1$  es el momento flector de la viga con cargas ficticias de Fig. 58c hallado en el mismo punto de abscisa  $x_1$ .

Finalmente de la fórmula (61)\* y de la Fig. 58c obtenemos:

$$\varphi = \varphi_{x_1} = \varphi_A + \int_0^{x_1} \frac{M_f}{EI_{xx}} dx$$

Y reemplazando:

$$\varphi_A = -R_A^*$$

Obtenemos:

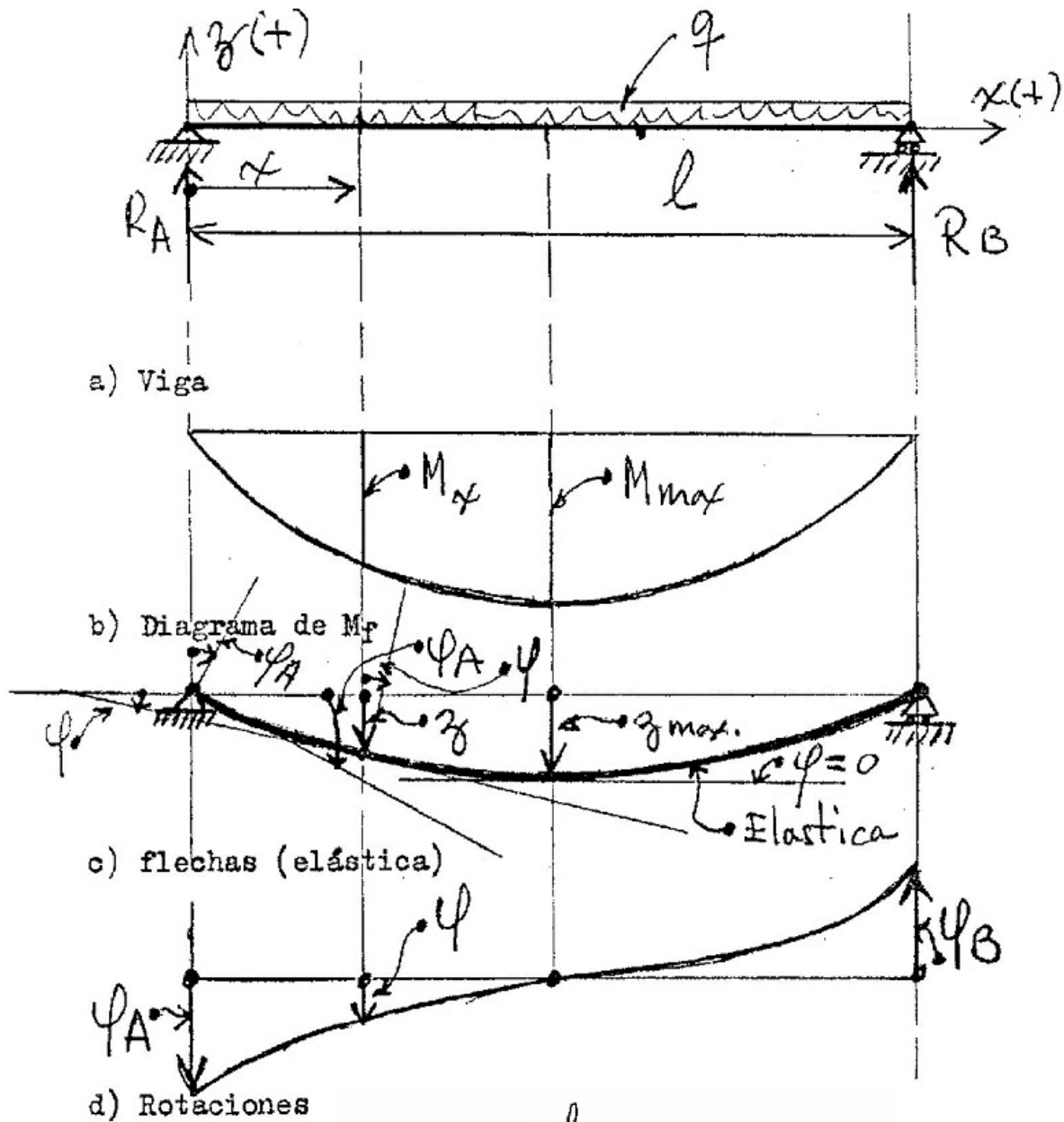
$$\varphi = \varphi_{x_1} = -R_A^* + \int_0^{x_1} \frac{M_f}{EI_{xx}} dx \quad (70)$$

La (70) nos dice que la rotación ( $\varphi$ ) de la viga de Fig. 58a en el punto de abscisa  $x_1$  es el esfuerzo de corte cambiando de signo (de acuerdo a las convenciones de signos hechos) de la viga con carga ficticia de Fig. 58c hallado en el mismo punto de abscisa  $x_1$ .

En consecuencia el procedimiento de Möhr consiste en lo siguiente:

- Se resuelve la viga con el sistema de cargas dado y se hallará el diagrama de  $M_f$
- Se carga la viga con el diagrama de momentos flectores reducidos  $\frac{M_f}{EI_{xx}}$  tomando como sistema de cargas ficticias.
- Se resuelve la viga hallando las reacciones ficticias  $R_A^*$  y  $R_B^*$  Estas son respectivamente la rotación en el apoyo A cambiada de signo y la rotación en el apoyo B de la viga dada.
- Se trazan ya sea por métodos analíticos o gráficos (estos últimos en este caso resultarán en general más convenientes) los diagramas de momentos flectores y esfuerzos de corte ficticios. El primer diagrama nos dará las flechas de la viga dada en cualquier punto de abscisa  $x$  (o sea nos dará la elástica) y el segundo diagrama nos dará la rotación cambiada de signo de cualquier sección de abscisa  $x$  de la viga dada.

## 5°) Aplicaciones

a) Viga uniformemente cargada

$$R_A = R_B = \frac{q l}{2}$$

$$M_x = R_A \cdot x - \frac{q x^2}{2} = \frac{q l}{2} \cdot x - \frac{q x^2}{2}$$

$$M_{\max} = \frac{q l^2}{8}$$

Fig. 59

Aplicando la ecuación diferencial (60)\*

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{M}{EI_{nn}} = \frac{1}{EI_{nn}} \left( \frac{ql}{2} \cdot x - \frac{qx^2}{2} \right)$$

$$\frac{dz}{dx} = \varphi = \frac{1}{EI_{nn}} \left[ \int \left( \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2} \right) dx \right]$$

$$\varphi = \frac{1}{EI_{nn}} \left( \frac{ql}{4} x^2 - \frac{q}{6} x^3 + C_1 \right) \quad (71)$$

$$z = \int \frac{dz}{dx} dx = \frac{1}{EI_{nn}} \left[ \int \left( \frac{ql}{4} x^2 - \frac{q}{6} x^3 + C_1 \right) dx \right]$$

$$z = \frac{1}{EI} \left( \frac{ql}{12} x^3 - \frac{q}{24} x^4 + C_1 x + C_2 \right) \quad (72)$$

Para determinar las constantes de integración  $C_1$  y  $C_2$  debemos aplicar "condiciones de borde" o "condiciones de deformación" y que son las siguientes:

- 1ra condición

para  $x = 0$  debe ser  $z = 0$

luego de la (72) obtenemos que:

$$C_2 = 0$$

- 2da condición

para  $x = \frac{l}{2}$  debe ser  $\varphi = 0$  por razones de simetría

Luego de la (71)

$$\varphi = \frac{1}{EI_{nn}} \left[ \frac{ql}{4} \left( \frac{l}{2} \right)^2 - \frac{q}{6} \left( \frac{l}{2} \right)^3 + C_1 \right] = 0$$

$$C_1 = - \frac{ql^3}{24}$$

Que reemplazada en (71) y (72) nos da

$$\psi = \frac{q}{EI_{nn}} \left( -\frac{x^3}{6} + \frac{l}{4} x^2 - \frac{l^3}{24} \right) \quad (73)$$

$$\zeta = \frac{q}{EI_{nn}} \left( -\frac{1}{24} x^4 + \frac{l}{12} x^3 - \frac{l^3}{24} x \right) \quad (74)$$

La (73) nos da la rotación y la (74) la flecha en cualquier abscisa de la viga. Ejemplos:

$$\text{para } x = 0 \rightarrow \psi = \psi_A = -\frac{q l^3}{24 E I_{nn}}$$

$$\text{para } x = l \rightarrow \psi = \psi_B = +\frac{q l^3}{24 E I_{nn}}$$

$$\text{para } x = \frac{l}{2} \rightarrow \zeta = \zeta_{\max} = -\frac{5}{384} \frac{q l^4}{E I_{nn}}$$

Iguals y de signo contrario como efectivamente debe ser por razones de simetría.

b) Viga con carga cualesquiera

Haremos un planteo teórico del problema. El diagrama de  $M_f$  no está representado por una única función como en el caso anterior

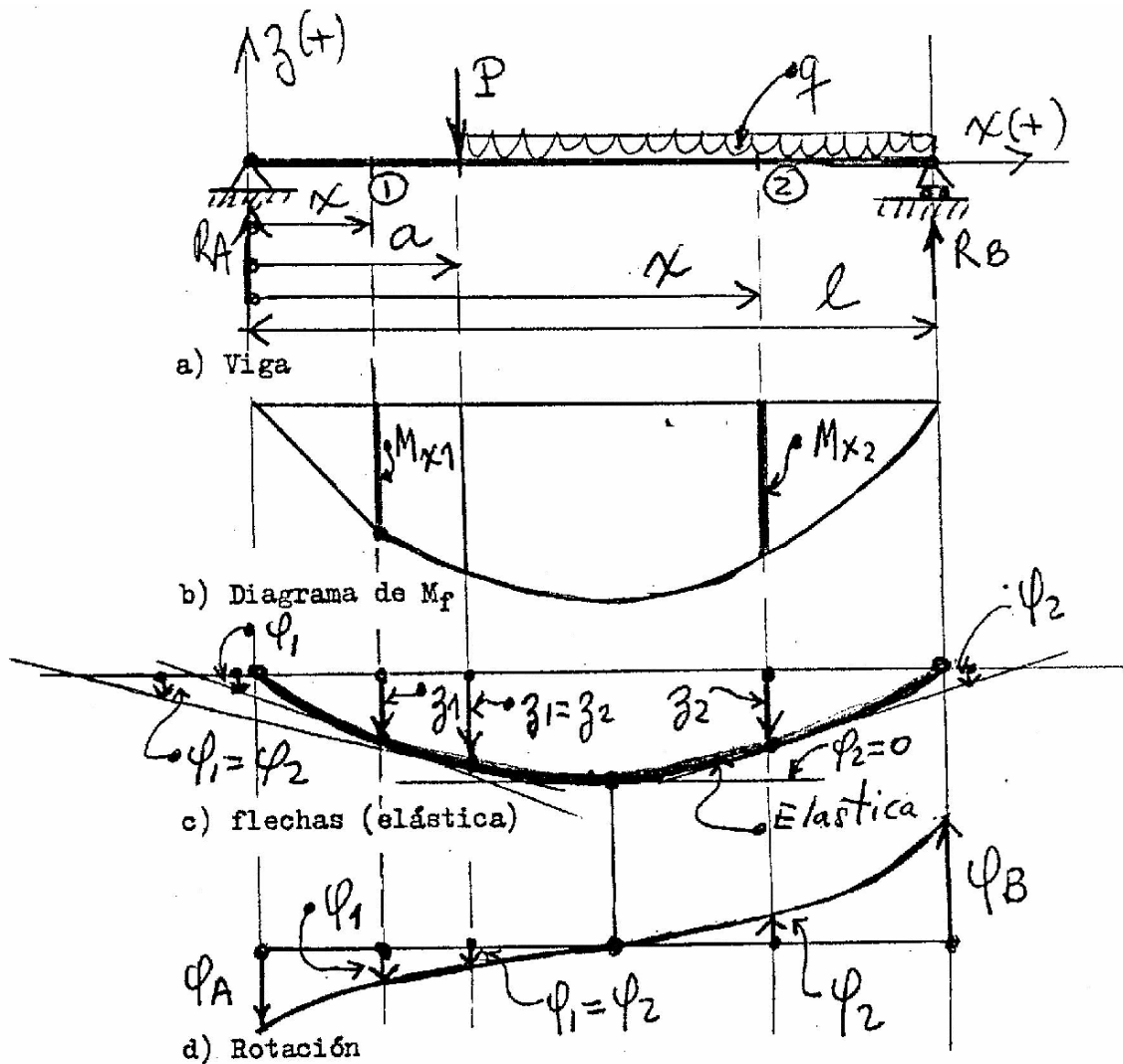


Fig. 60

Aquí

Para  $0 \leq x \leq a$

$$M_{x1} = R_A \cdot x$$

Para  $a \leq x \leq l$

$$M_{x2} = R_A \cdot x - P(x - a) - \frac{q(a - x)^2}{2} = -\frac{q}{2}x^2 + (R_A - P + q \cdot a)x + (P \cdot a - q \cdot \frac{a^2}{2})$$

Por consiguiente hay que plantear dos ecuaciones diferenciales dadas por la fórmula (60)\*

$$\frac{d^2 z_1}{dx^2} = \frac{M_{fx1}}{E I_{nn}} \quad (60') \quad \text{y} \quad \frac{d^2 z_2}{dx^2} = \frac{M_{fx2}}{E I_{nn}} \quad (60'')$$

Resolviendo la (60')

$$\psi_1 = \frac{1}{E I_{nn}} \left( R_A \frac{x^2}{2} + C_1 \right) \quad (75)$$

$$\zeta_1 = \frac{1}{E I_{nn}} \left( R_A \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 \right) \quad (76)$$

Resolviendo la (60'')

$$\psi_2 = \frac{1}{E I_{nn}} \left[ -\frac{q}{6} x^3 + \frac{1}{2} (R_A - P + q \cdot a) x^2 + \left( P \cdot a - q \frac{a^2}{2} \right) x + C_3 \right] \quad (77)$$

$$\zeta_2 = \frac{1}{E I_{nn}} \left[ -\frac{q}{24} x^4 - \frac{1}{6} (R_A - P + q \cdot a) x^3 + \frac{1}{2} \left( P \cdot a - q \frac{a^2}{2} \right) x^2 + C_3 \cdot x + C_4 \right] \quad (78)$$

Tenemos cuatro constantes de integración  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$ . Luego debemos plantear cuatro ecuaciones mediante cuatro "condiciones de borde".

1ra condición:

$$\text{para } x = 0 \quad \text{debe ser} \quad z_1 = 0 \quad (79)$$

2da condición:

$$\text{para } x = a \quad \text{debe ser} \quad z_1 = z_2 \quad (80)$$

3ra condición:

$$\text{para } x = a \quad \text{debe ser} \quad \psi_1 = \psi_2 \quad (81)$$

4ta condición:

$$\text{para } x = \ell \quad \text{debe ser} \quad z_2 = 0 \quad (82)$$

Utilizando las expresiones de  $\psi_1$ ,  $\zeta_1$ ,  $\psi_2$  y  $\zeta_2$  hallados anteriormente y las condiciones de borde expresados por las ecuaciones (79), (80), (81) y (82) llegamos al planteo de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas ( $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$ ).

Halladas estas constantes se reemplazan en las ecuaciones (75), (76), (77) y (78) y con ellas podemos tener la flecha  $z$  y la rotación  $\psi$  en cualquier punto de la viga de Fig. 60.

No hacemos aplicaciones del Teorema de Mohr que se harán en la práctica si el tiempo disponible lo permite.