

1. Flexión Plana

La flexión plana se presenta cuando

$N = 0$

$M_f \neq 0$

$Q \neq 0$

$M_t \neq 0$

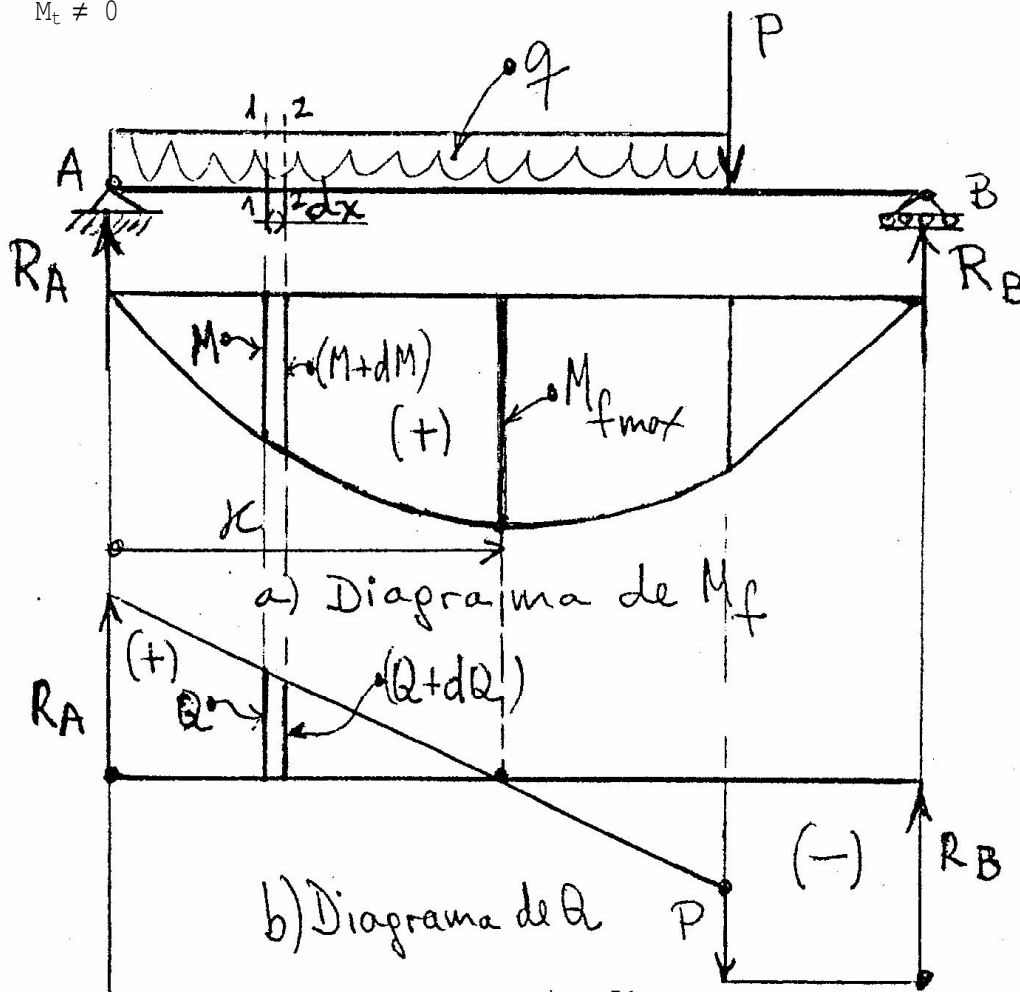


Fig. 51

En el caso de la Fig. 51 en la que salvo la sección en donde el momento flector es máximo ( $M_{fmax}$ ) en las demás estamos en las condiciones arriba indicadas. Es también el caso que se presenta en la práctica más frecuentemente.

## 2. Tensiones normales, tensiones rasantes longitudinales, tensiones tangenciales. Fórmula de Colignon.

Supongamos que la viga de la Fig. 51 sea la misma que la de la Fig. 40 y que el plano del momento flector, coincidente con el plano de las cargas, contenga al eje de simetría y de la sección.

Si consideramos nuevamente las dos secciones 1 - 1 y 2 - 2 indicadas en las figuras 40 y 51 podríamos constatar que en la viga deformada se repiten los hechos señalados en el punto 2 (hojas 3 y 4) del Tema XVI o sea que: a pesar que la forma de la viga deformada depende del sistema de cargas sigue siendo válida la hipótesis de Navierre, se sigue verificando que las dos secciones rotan una con respecto a la otra de un ángulo  $dy$  y sigue existiendo un eje baricéntrico  $n$  (eje neutro) arriba del cual las fibras se acortan y debajo se alargan.

Es posible demostrar (pero no lo haremos) que este hecho se debe a que la forma de la viga deformada depende fundamentalmente de las deformaciones provocadas por los momentos flectores ( $M_f$ ) mientras que se pueden despreciar las deformaciones debidas a los esfuerzos de corte ( $Q$ ) como que se pueden despreciar las deformaciones debidas a los esfuerzos normales ( $N$ ) en el caso en que actuaran también estos. Aquí cabe hacer una advertencia: las que son despreciables son las deformaciones debidas a los esfuerzos de corte ( $Q$ ) y esfuerzos normales ( $N$ ) pero no las tensiones que ellos provocan.

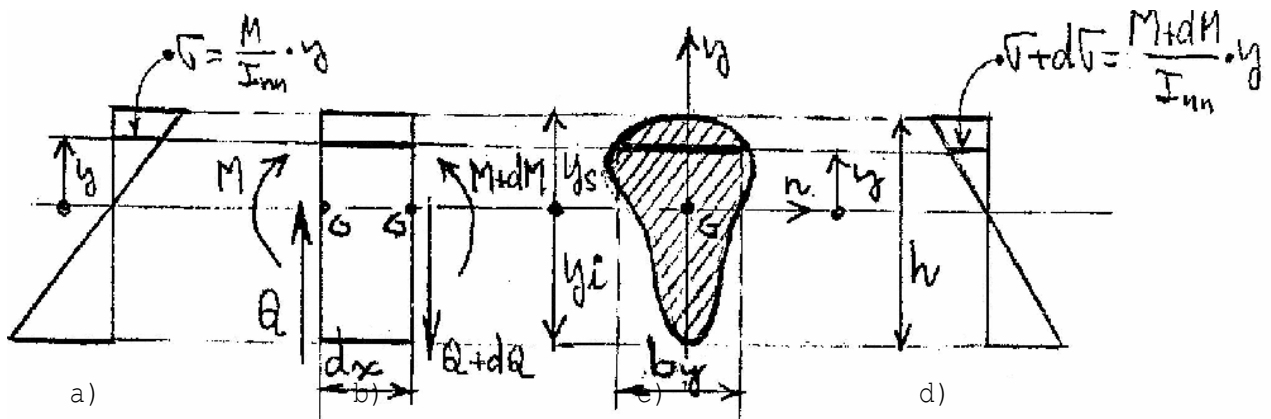
Por otro lado en algunos tipos de estructuras o para el estudio de algún fenómeno en particular se tienen en cuenta también esas deformaciones pero en el curso de esta materia nosotros las despreciaremos.

Como conclusión de lo expresado anteriormente podemos decir que el análisis hecho mediante el estudio de la Fig. 41 sigue siendo válido aquí y que por consiguiente es válida la fórmula (48).

Del análisis de la "condición mecánica de equilibrio" resultará que como el esfuerzo normal (N) es igual a 0, el eje neutro n es un eje baricéntrico y que como el momento flector debe equilibrarse con el momento estático de todas las fuerzas normales a la sección ligadas a ella, sigue siendo válida la fórmula (50) (ver hojas 5, 6 y 7 del tema XVI) por lo que las tensiones normales estarán dadas por la misma fórmula, hallada en flexión simple e igual a:

$$\sigma = - \frac{M_f}{I_{nn}} \cdot y \quad (50)$$

En consecuencia si consideramos las dos secciones 1 - 1 y 2 - 2 de la viga de figura 51 el diagrama de tensiones normales será el de la Fig. 52.



- a) Tensiones en la sección 1-1
- b) Elemento de viga
- c) Sección de viga
- d) Tensiones en la sección 2-2

Fig. 52

Pero aquí a diferencia del caso de flexión simple tenemos otro esfuerzo (el de corte Q) a equilibrarse para que se cumpla totalmente "condición mecánica de equilibrio".

Analizaremos entonces el caso. Si en la Fig. 52 considero el equilibrio de la parte superior del elemento de viga obtengo la situación en la Fig. 53.

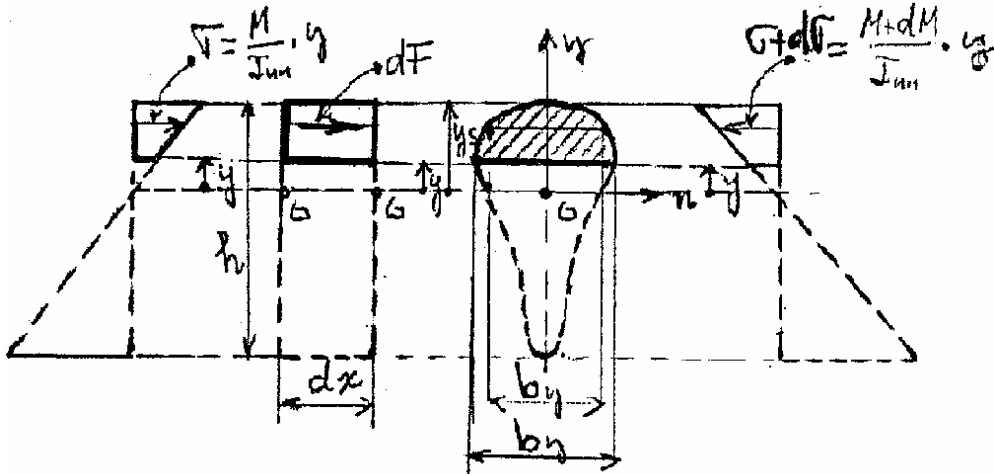


Fig. 53

Quiere decir que esa parte estará sometida a la acción de una fuerza  $dF$  resultante de la suma de las fuerzas actuantes a izquierda y a derecha como consecuencia de las tensiones normales y será igual a:

$$dF = \int_y^{y_s} \sigma \cdot b_y \cdot dy - \int_y^{y_s} (\sigma + d\sigma) \cdot b_y \cdot dy =$$

$$= \int_y^{y_s} \frac{M}{I_{nn}} \cdot y \cdot b_y \cdot dy - \int_y^{y_s} \frac{M+dM}{I_{nn}} \cdot y \cdot b_y \cdot dy = - \int_y^{y_s} \frac{dM}{I_{nn}} \cdot y \cdot b_y \cdot dy$$

Ahora bien,  $dM$  e  $I_{nn}$  son constantes en esta última por cuanto  $I_{nn}$  es constante para toda la viga y  $dM$  no varía con  $y$  sino con  $x$ . Luego:

$$dF = - \frac{dM}{I_{nn}} \int_y^{y_s} y \cdot b_y \cdot dy$$

Pero la integral es el momento estático con respecto al eje neutro de la parte. De la superficie de la sección arriba de la ordenada  $y$  que

simbolizaremos con  $S_y^{y_s}$ .

Entonces:

$$dF = - \frac{dM}{I_{nn}} \cdot S_y^{y_s} \quad (63)$$

Pero esta fuerza debe equilibrarse con otra ya que toda la viga o cualquiera de sus partes debe estar en equilibrio. La fuerza equilibrante de la (63) estará proporcionada por las tensiones razonantes longitudinales ( $\sigma$ ) que actuarán sobre la superficie  $b_y \cdot dx$  según se muestra en perspectiva en la Fig. 54.

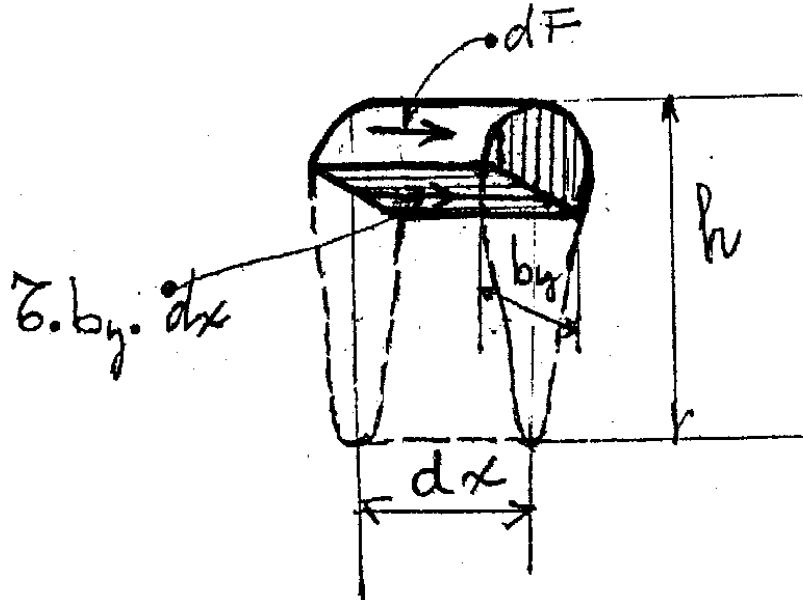


Fig. 54

Luego:

$$\begin{aligned} \sigma \cdot b_y \cdot dx + dF &= 0 \\ \sigma \cdot b_y \cdot dx - \frac{dM}{I_{nn}} \cdot S_y^{ys} &= 0 \end{aligned}$$

Y

$$\sigma = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{1}{b_y \cdot I_{nn}} \cdot S_y^{ys}$$

Pero

Entonces resultará  $\frac{dM}{dx} = Q$  (ver tema XI)

$$\sigma = \frac{Q}{b_y \cdot I_{nn}} \cdot S_y^{ys} \quad (53)^*$$

La (53)\* es la llamada Fórmula de Colignon.

Finalmente analicemos nuevamente el elemento de viga de la Fig. 53. hemos demostrado que para cada valor  $y$  existen tensiones razantes longitudinales, por consiguiente por el teorema de Cauchy (ver punto 8 del tema XIV) deben existir las mismas tensiones en el plano normal que es el plano de la sección como se indica en la Fig. 55:

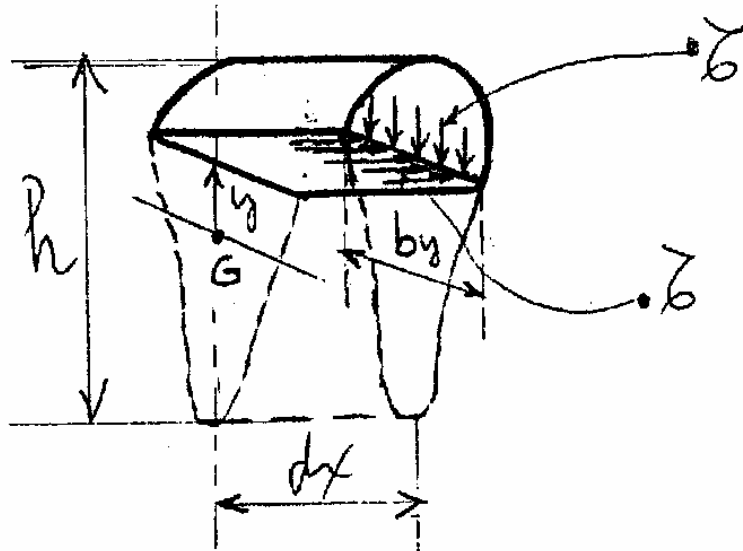


Fig. 55

Estas tensiones sobre la superficie de la sección reciben el nombre de tensiones tangenciales o también de corte.

Dada una determinada sección tendremos un determinado esfuerzo de cortes  $Q$  y un momento de inercia  $I_{nn}$ . Por la fórmula (53)\* el valor de la tensión

tangencial  $\tau$  depende de  $y$  por intermedio de  $b_y$  y de  $S_y^{ys}$  .-

En la mayoría de los casos  $b_y$  es constante pero  $S_y^{ys}$  varía siempre con  $y$ .

Luego  $\tau$  es como  $\tau$  dependiente de  $y$ .

La suma de todas las fuerzas debidas a las tensiones tangenciales  $\tau$  sobre la superficie de la sección, debe ser naturalmente igual a  $Q$  .-

### 3. Aplicaciones de la fórmula de Colignon.

Veremos la aplicación de la fórmula (53)\* a dos casos.

#### a) Secciones rectangulares

Supongamos la sección rectangular de la figura 56

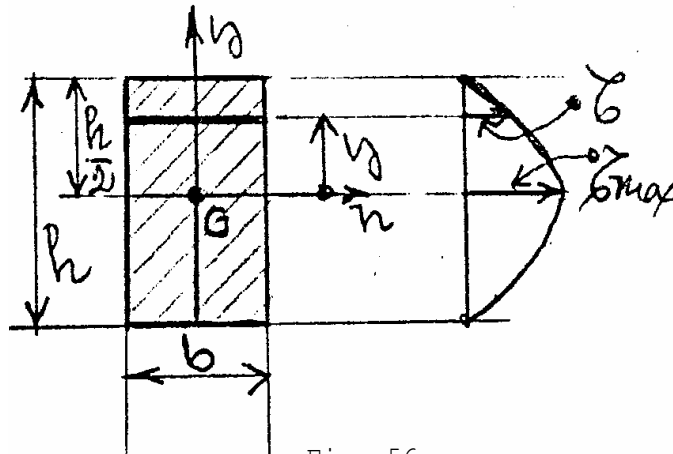


Fig. 56

$$\tau = \frac{Q}{b I_{nn}} \cdot S_y^{nc} \text{ siendo } \begin{cases} I_{nn} = \frac{bh^3}{12} \\ S_y^{nc} = b \left( \frac{h}{2} - y \right) \left[ y + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} - y \right) \right] \\ = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \end{cases}$$

Reemplazando valores

$$\tau = Q \frac{6}{bh^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) (54)^* \rightarrow \text{para } \begin{cases} y = \frac{h}{2} \rightarrow \tau = 0 \\ y = 0 \rightarrow \tau = \tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} \\ y = -\frac{h}{2} \rightarrow \tau = 0 \end{cases}$$

La (54)\* está graficada en la Fig. 56.

#### b) Secciones doble T

Son las de la Fig. 57 en la que también está graficada la variación de  $\sigma$  e indicado el  $\sigma_{max}$  que pueden ser hallados analíticamente siguiendo el procedimiento visto en a).

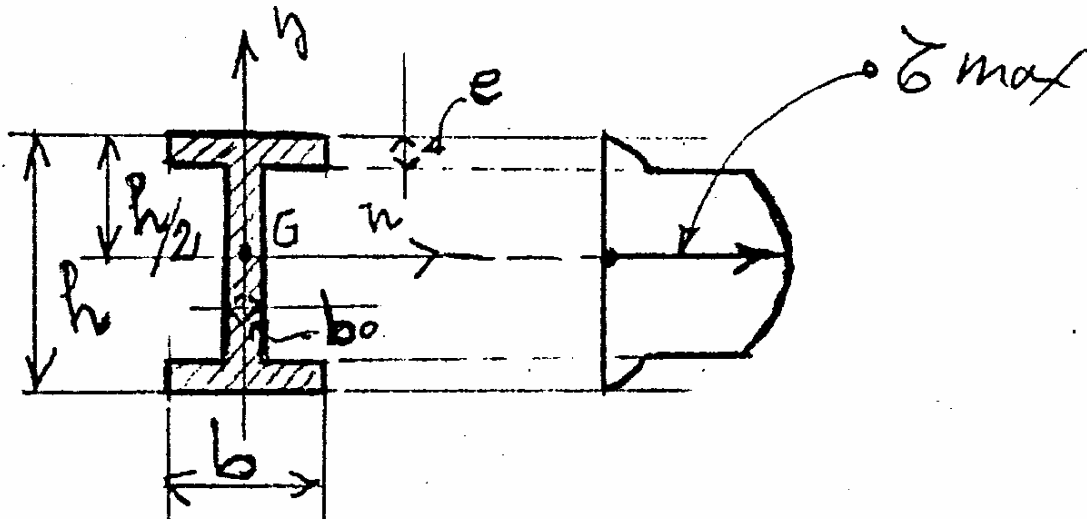
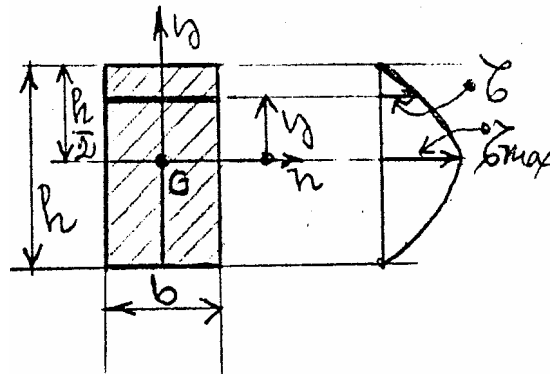


Fig. 57

(\*\*) Demostración para el caso de sección rectangular (Fig. 56)



Teniendo en cuenta la formula (54)\* resulta:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma \cdot b \cdot dy = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Q \frac{b}{b \cdot h^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \cdot b \cdot dy =$$

$$= \frac{6Q}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) dy = \frac{6Q}{h^3} \left[ \frac{h^2}{4} y \Big|_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} - \frac{y^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \right]$$



