

1.- Flexión Simple

Como lo anticipamos en el Tema XIII se trata del caso en el que:

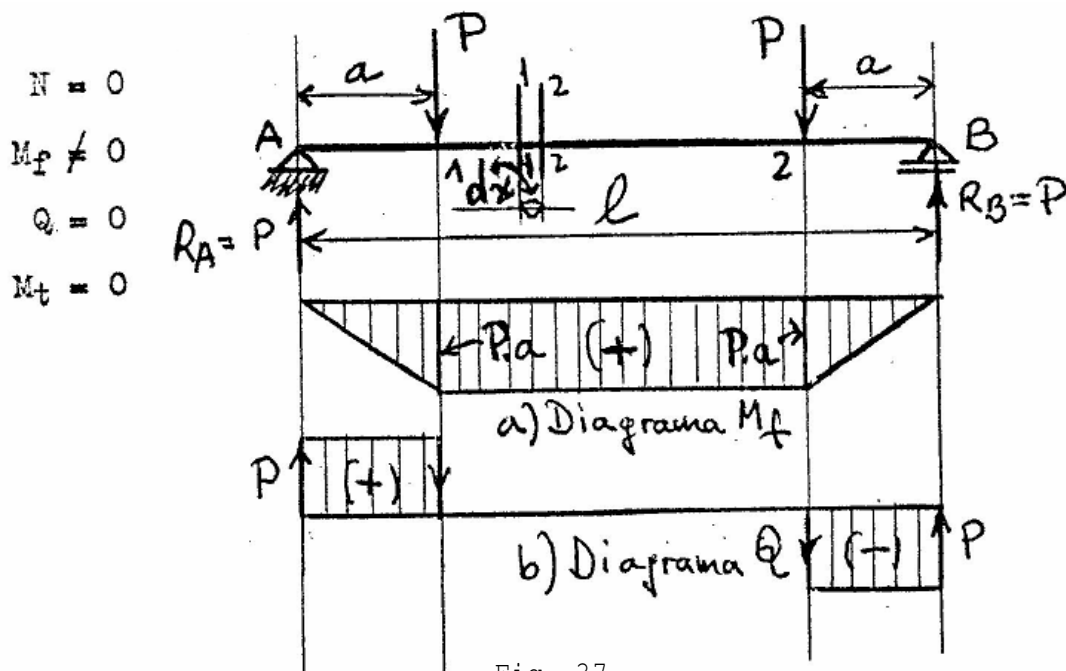
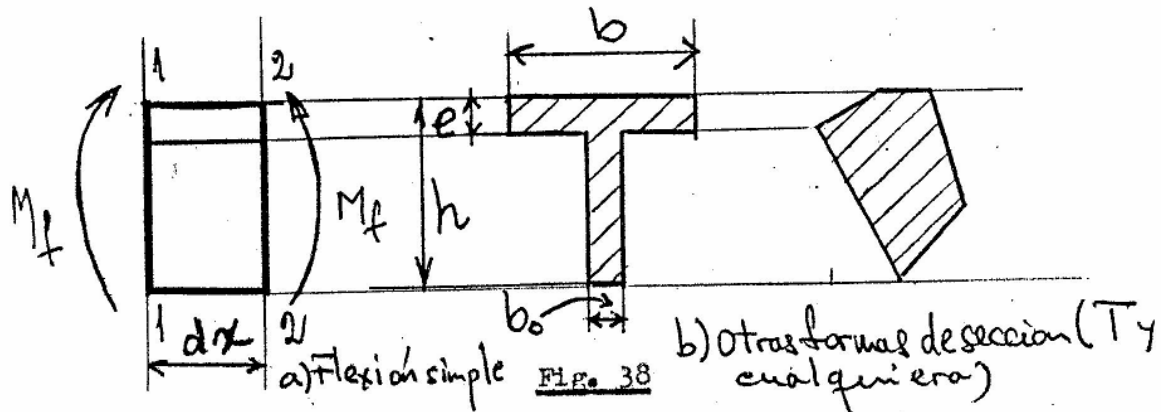


Fig. 37

Una estructura como la de la Fig. 37 cargada con un sistema de cargas como el ella se indica produce entre los puntos 1 y 2 de la viga un estado de sollicitación que cumple con las condiciones de la flexión simple.

Si ahora considero dos planos cuyos trazos son 1 - 1 y 2 - 2, normales al eje AB de la viga y separados entre si de un valor infinitésimo d_x puedo decir que el elemento de viga estará sometido a un par flector como el indicado en la Fig. 38^a. Por otra parte al cortar la viga con esos planos normales a su eje ponemos de manifiesto la sección transversal de la misma que como se dijo en el tema XIII puede tener distintas formas (ver Fig. 11b t Fig. 38b)



Normalmente las secciones más usadas tienen uno o dos ejes de simetría como las de Fig. 11b del tema XIII o la **T** de la figura 38 b. son excepcionales las secciones cualquiera como la de la figura 38b aquí adquiere especial importancia lo estudiado en el tema XII: "Momentos de segundo orden".

Recordemos que allí se vio que si una superficie (o sección) tiene ejes de simetría, estos ejes son también ejes principales de inercia.

Teniendo en cuenta además que al estudiar los cuerpos vinculados sometidos a determinados estados de cargas (o fuerzas) los tratamos como si esos cuerpos y las fuerzas (o cargas) estuvieran contenidas en un plano (o es posible casi siempre reducirlos a ese esquema), es lícito hablar entonces de un plano del momento flector que coincide con el plano de la estructura y de las cargas (o plano del dibujo).

En un esquema más general es posible, de todos modos, siempre hablar de un plano del momento que será aquel determinado por el momento resultante de todos los momentos de las fuerzas de la izquierda con respecto al centro de gravedad de la sección. Este momento podrá eventualmente ser descompuesto en un plano normal a la sección que nos dará el momento flector (M_f) y en el plano de la sección que nos dará el momento torsor (M_t). En el caso de la flexión simple el plano del momento es el plano de la cupla resultante izquierda.

Aquí se pueden presentar dos casos: el primero es cuando el plano del momento contiene uno de los ejes de simetría (o ejes principales) de la

sección y en ese caso estamos en presencia de la flexión simple normal. El segundo es cuando el plano del momento no contiene a un eje de simetría (o eje principal de inercia) y en ese caso hablamos de flexión simple oblicua. El plano de la sección y el plano del momento flector son planos normales entre sí.

En las figuras 39 a y b Y figura 39c se ilustran los casos mas comunes en los que se tiene una sección con dos ejes de simetría.

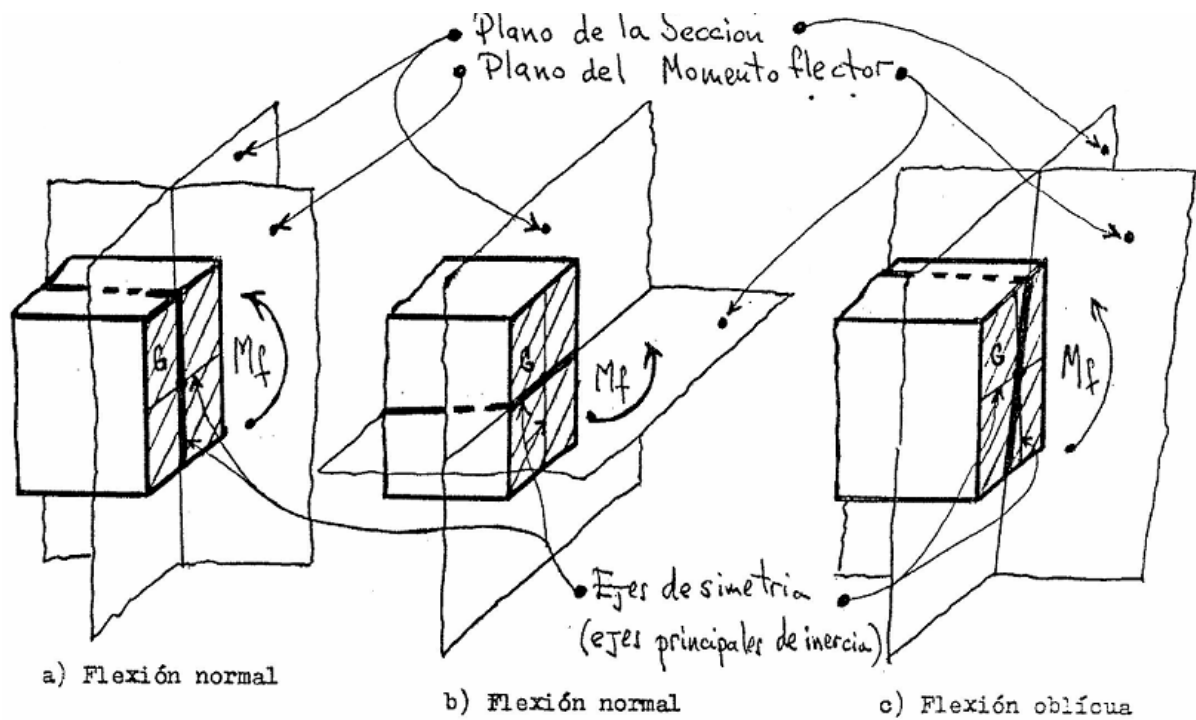


Fig. 39

2.- Hipótesis de Navier - Eje neutro

En el tema XIII al hablar de las hipótesis fundamentales de la Resistencia de materiales ya hemos mencionado esta hipótesis. Aquí ampliaremos su concepto.

Supongamos una viga de eje recto como la de la Fig. 40 a sometida a un estado de carga como el de la Fig. 37 y cuya sección obtenida interceptando el eje longitudinal AB de la misma con un plano normal al citado eje sea la Fig. 40 c. Supongamos también que el plano del momento sea un plano normal al plano de la sección y que contenga el eje de simetría la misma. Finalmente supongamos que vamos a referir la citada viga a un par de ejes generales ortogonales $x - z$ con origen en A (figura 40 a) y la sección a un par de ejes locales $n - y$ con origen en el centro de gravedad (G) de aquella (Fig. 40 c).

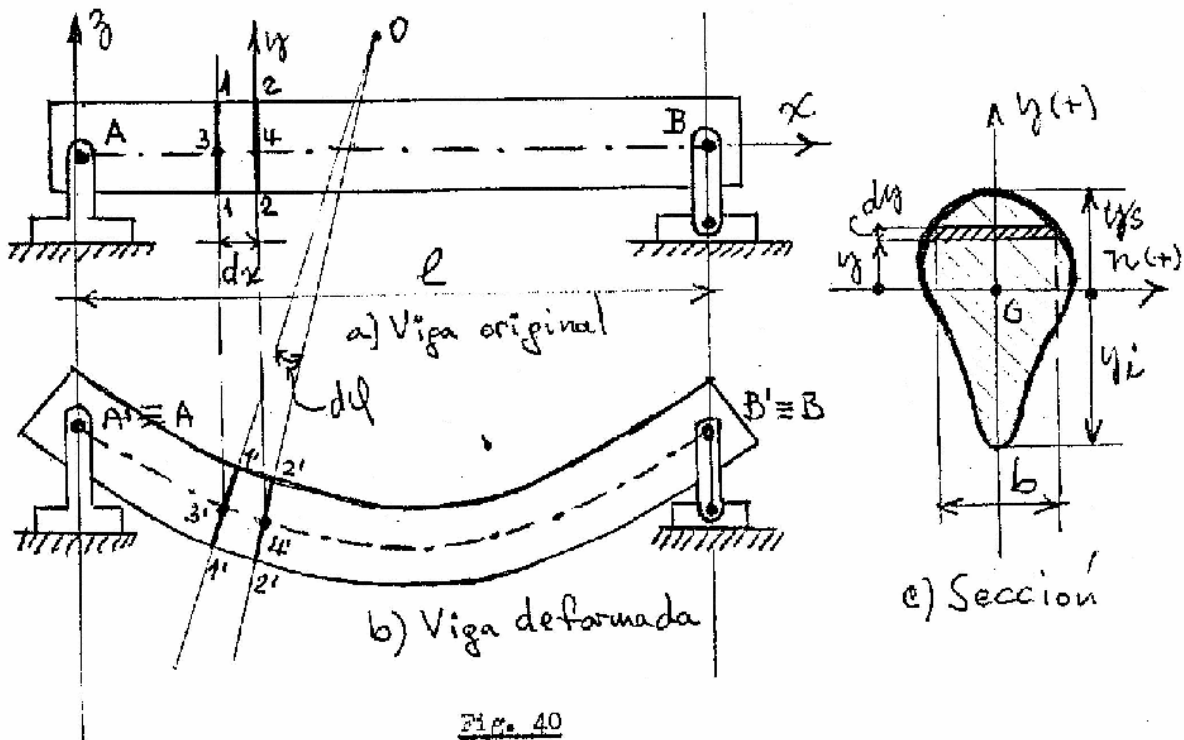


Fig. 40

La viga por efecto de las cargas se deformará y adquirirá la forma indicada en la Fig. 40 b y podemos constatar los siguientes hechos:

- Las secciones planas obtenidas con la intersección de la viga por medio de dos planos (1 - 1 y 2 - 2) separados entre si de un dx y

normales al eje AB de aquella y que pasan por los puntos 3 y 4 (centro de gravedad de las respectivas secciones) se mantienen planas después de la deformación. Esta es la hipótesis de Navier (Fig. 40 a y b).

•• Las dos secciones aun manteniéndose planas rotan una con respecto a la otra de un ángulo $d\varphi$ como se muestra en la Fig. 40 b.

••• El eje n divide a la sección en dos partes (superior e inferior). Si llamamos "fibra" a un elemento diferencial de viga de igual longitud que esta y de sección $b \times dy$ (Fig. 40 c) resultará que las fibras superiores sufren un acortamiento y las inferiores un alargamiento (Fig. 40 b). La fibra del eje n no sufre ni alargamiento ni acortamiento y recibe por lo tanto el nombre de "fibra neutra" y el eje n el nombre de eje neutro.

Mas adelante demostraremos que efectivamente el eje neutro es un eje baricéntrico o sea pasa por el centro de gravedad de la sección (G) como se indica en figura 40 c.

3. Ecuaciones de equilibrio y estabilidad en la flexión.
Tensiones. Diagramas

Volvamos a la Fig. 40b y analicemos por separado el elemento de viga deformada que reproducimos en la figura 41.

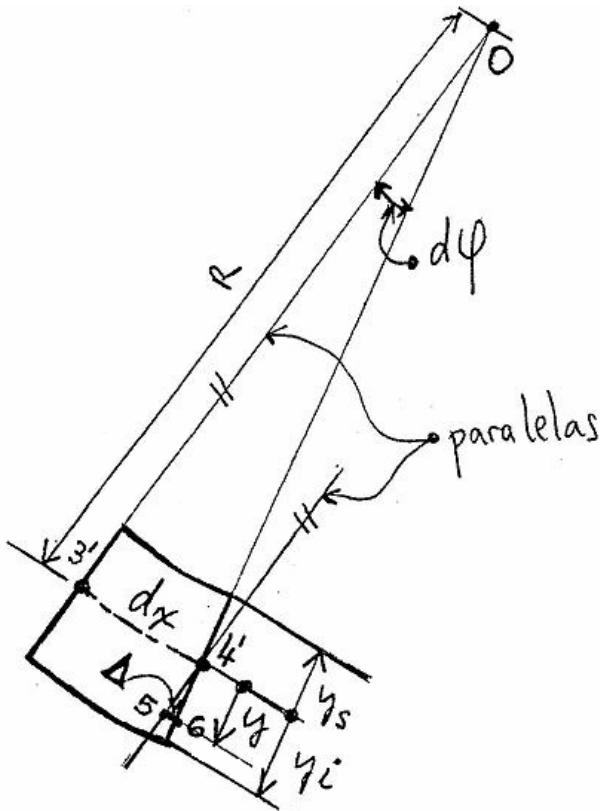


Fig. 41

El segmento $\overline{03'}$ = R es el radio de curvatura de la viga deformada en el punto 3'. Por el punto 4' tracemos una paralela al segmento 03'. A una distancia y del eje neutro la fibra habrá sufrido un alargamiento Δ .

Analizando los dos triángulos semejantes $\triangle 3'4'$ y $\triangle 4'56$ podemos establecer la siguiente relación:

$$\frac{\overline{3'4'}}{R} = \frac{\Delta}{y} = \frac{\overline{56}}{y}$$

pero $\overline{3'4'} = dx =$ fibra neutra

ya que la diferencia de longitud entre el segmento AB y la curva A'B' es despreciable. (Recordar las condiciones básicas de resistencia de materiales).

Luego

$$\frac{dx}{R} = \frac{\Delta}{y} \rightarrow \frac{y}{R} = \frac{\Delta}{dx}$$

Pero $\frac{\Delta}{dx} = \epsilon \rightarrow$ deformación específica de la fibra a la distancia y .

ya que antes de deformarse todas tenían la misma longitud dx

Luego $\frac{y}{R} = \epsilon$

Pero por la ley de Hooke $\epsilon = \frac{\sigma}{E}$

Por lo que $\frac{y}{R} = \frac{\sigma}{E} \rightarrow \sigma = \frac{E}{R} \cdot y$ (48)

La (48) nos dice que las tensiones que se desarrollan en las fibras a distintas distancias del eje neutro son directamente proporcionales a dichas distancias ya que E es constante para toda la pieza y R es constante para una sección determinada (lo que es una lógica consecuencia de la hipótesis de Navier y de la ley de Hooke). Por consiguiente si analizamos el elemento dx de viga podemos resumir lo visto hasta ahora mediante el siguiente esquema (Fig. 42)

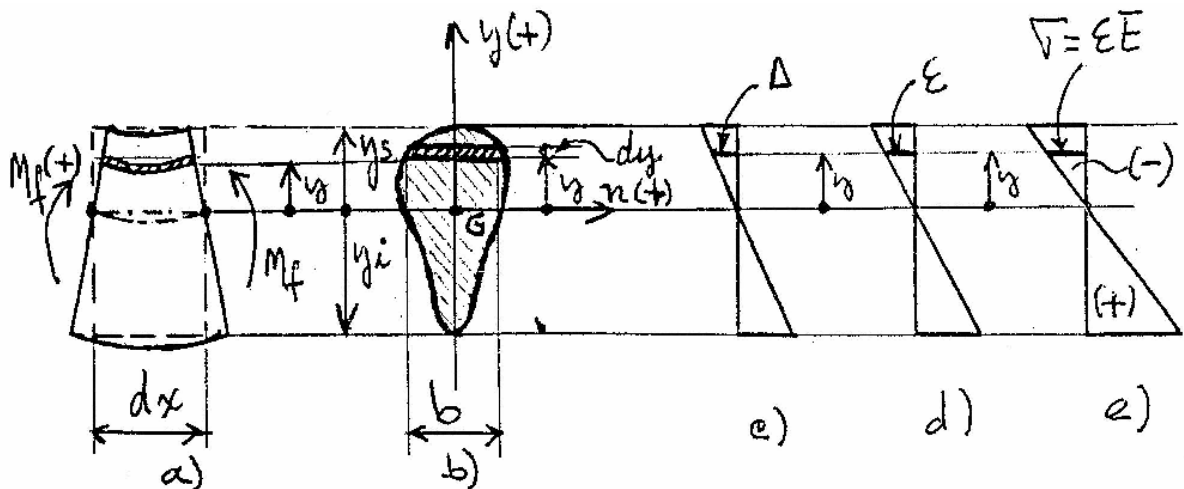


Fig. 42

Antes de seguir adelante es conveniente recordar algunas convenciones hechas: los momentos flectores los tomamos positivos según nos muestra la Fig. 42a y las tensiones de compresión negativas y las de tracción positivas según la Fig. 42e ya que las fibras que se acortan estarán lógicamente sometidas a compresión y las que se alargan a tracción según lo que hemos visto en el tema XIV. Aquí agregaremos que los ejes n e y los tomaremos positivos según indica la Fig. 42b.

Para encontrar la relación entre las tensiones (σ) y la sollicitación (M_f) utilizaremos la "condición mecánica de equilibrio" vista en el tema XIII.

La primera condición de equilibrio es que siendo el esfuerzo normal (N) igual a 0 debe verificarse que la suma de todas las fuerzas normales ligadas a la sección debe ser igual a 0. Teniendo en cuenta que un diferencial de fuerza es:

$$dF = \sigma \cdot b \cdot dy$$

Debe resultar:

$$N = \int_{y_i}^{y_s} dF = \int_{y_i}^{y_s} \sigma \cdot b \cdot dy = 0$$

Y reemplazando σ por la (48) resulta

$$N = \frac{E}{R} \int_{y_i}^{y_s} y \cdot b \cdot dy = 0$$

pero $b \cdot dy = ds$ = diferencial de superficie de la sección

Luego como $\frac{E}{R} \neq 0$

Debe ser $\int_{y_i}^{y_s} y \cdot ds = 0$

Pero esta integral es el momento estático de la superficie de la sección con respecto al eje neutro n y como debe ser igual a 0 resulta entonces que el eje neutro n es un eje baricéntrico (ver tema VIII "Momento estático de superficies"). Queda entonces demostrado lo dicho en el punto 2.

La segunda condición de equilibrio que debe cumplirse es que el momento estático de todas las fuerzas ligadas a la sección con respecto al eje neutro debe ser igual al momento exterior (M_f), luego por ser un diferencial de momento igual a:

$$dM = \underbrace{\sigma \cdot b \cdot dy}_{dF} \cdot \underbrace{y}_{\text{Brazo de palanca}}$$

Resulta

$$M_f = \int_{y_i}^{y_s} dM = \int_{y_i}^{y_s} \sigma \cdot b \cdot dy \cdot y = \frac{E}{R} \int_{y_i}^{y_s} y^2 \cdot b \cdot dy$$

Pero

$$\int_{y_i}^{y_s} y^2 \cdot b \cdot dy$$

es el momento de segundo orden o momento de inercia de la superficie de la sección con respecto al eje neutro \underline{n} \underline{y} a que $\underline{b} = \underline{dy}$ es un diferencial de dicha superficie.

Luego llamando

$$I_{nn} = \int_{y_i}^{y_s} y^2 \cdot b \cdot dy$$

Resulta que

$$M_f = \frac{E}{R} \cdot I_{nn} \quad \circ \quad \frac{E}{R} = \frac{M_f}{I_{nn}} \quad (49)$$

Si ahora nos fijamos en la (48) podemos poner

$$\sigma = \frac{E}{R} \cdot y = - \frac{M_f}{I_{nn}} \cdot y \quad (50)$$

El signo (-) aparece por las convenciones hechas. En efecto para un

M_f positivo y ordenada y positiva la tensión σ que se obtiene debe ser negativa (de compresión) como aparece en la Fig. 42e.-

La (50) nos da la variación de la tensión en las distintas fibras de la sección en función de su distancia y al eje neutro y teniendo como dato el momento flector (M_f) y el momento de inercia I_{nn} de la superficie de la sección con respecto al eje neutro n.-

Esta claro que la (50) nos dice también que el σ_{max} en valor absoluto obtiene para el y máximo también en valor absoluto (que puede ser y_s o y_i . en nuestro caso es y_i).

La (50) es muy usada para dimensionar las piezas de la estructura ya que normalmente la flexión es determinante. Es el caso de la Fig. 43

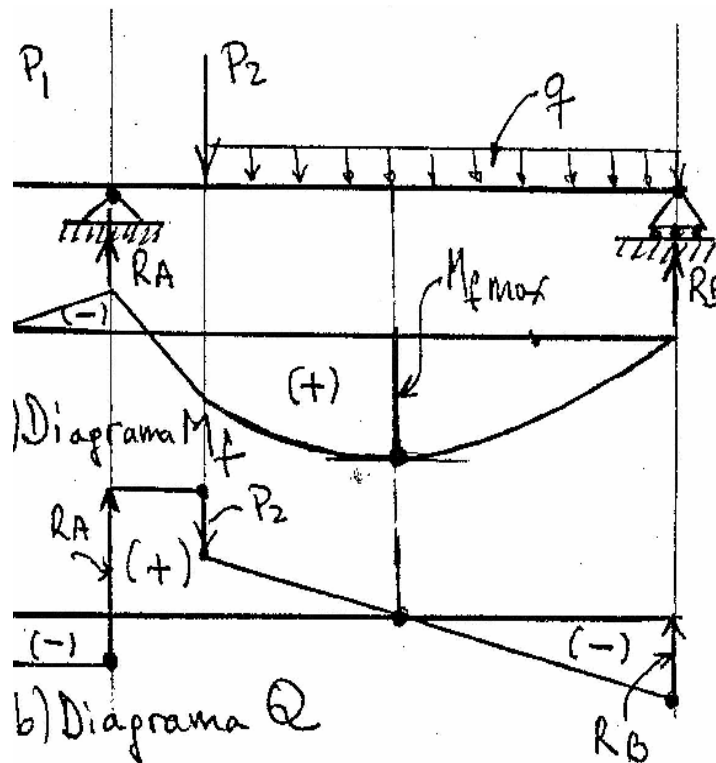


Fig. 43

Hallo primero en forma gráfica o analítica el valor de M_{fmax} . Con este valor y aplicando la (50) verifico que:

$$\sigma_{ad} \geq \sigma_t = \frac{M_{fmax}}{I_{nn}} \cdot |y_{max}| \quad (51)$$

Luego debo verificar las tensiones de corte pero eso lo veremos en el tema XVII siguiente. Si además del M_{fmax} en dicha sección tengo también un esfuerzo normal (N) deberé aplicar lo que veremos en el tema XIX "flexión compuesta".

Finalmente si quisiera graficar la (50) tendría (Fig. 44)

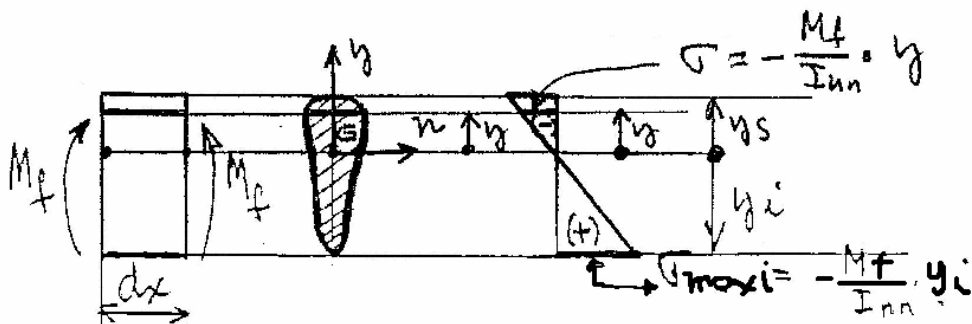


Fig. 44

Antes de finalizar este punto y para completarlo veamos dos aclaraciones más.

a) Hemos demostrado que el eje n es un eje baricéntrico y a continuación veremos que además es el conjugado del eje simetría y ó en este caso es el otro eje principal de inercia.

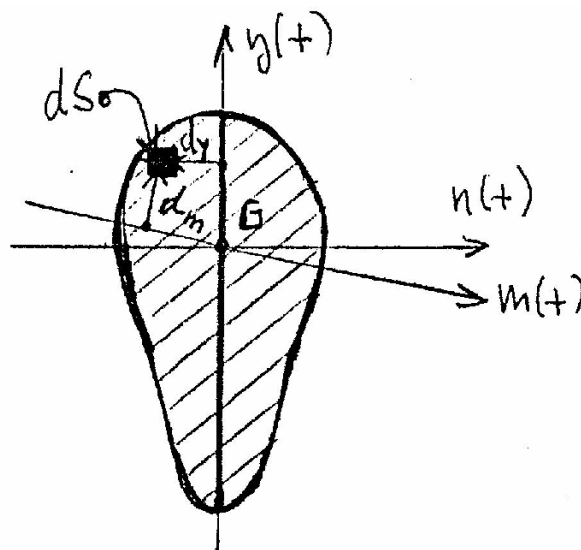


Fig. 45

En efecto supongamos por un momento que el eje neutro sea el m marcado en la figura 45 que también es un eje baricéntrico.

Considerando un área infinitesimal de la sección (dS) y tomando momento de todas las fuerzas ligadas a la sección con respecto al eje de simetría y (que es también la traza del plano del M_f) el resultado debe ser lógicamente igual a 0 o sea:

$$M_n = \int_S \sigma \cdot dS \cdot d_y = 0 \quad \text{pero } \sigma = \frac{E}{R} \cdot d_m \quad [(\text{ver formula (50)})]$$

Luego reemplazando valores tenemos

$$M_n = \frac{E}{R} \int_S d_y \cdot d_m \cdot dS = 0$$

Por ser $\frac{E}{R} \neq 0$

debe ser $\int_S d_y \cdot d_m \cdot dS = 0$

Momento centrífugo de la sección con respecto a los ejes m e y igual a 0.

Pero por ser el momento centrífugo igual a 0 los ejes m e y deben ser **ejes conjugados**, y como y es un eje principal de inercia el otro que hemos llamado m debe serlo también, ó sea m y n deben ser coincidentes (ver tema XII).

b) Al estudiar tracción y compresión hemos visto que si un cuerpo es traccionado además de alargarse se estrellita lateralmente (aunque en mucho menor grado) y si es comprimido sucede la inversa. Luego al producirse la deformación de la figura 40b como las fibras superiores se acortan y las inferiores se alargan debe producirse una modificación de la sección transversal de la Fig. 40c.

Para un más fácil desarrollo de este punto supongamos que la sección sea más regular que la de la figura 40c y sea como la de la figura 46. De

su análisis surge que:

$$\frac{y}{r} = \frac{\Delta'}{b} \rightarrow \frac{y}{r} = \frac{\Delta'}{b}$$

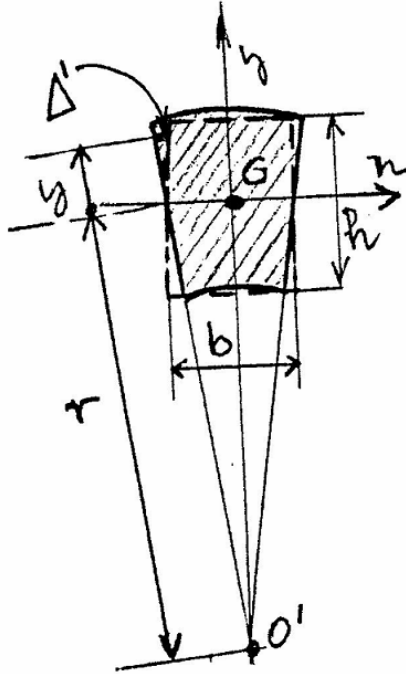


Fig. 46

Pero $\frac{\Delta'}{b} = \epsilon_t =$ deformación transversal

Pero $\epsilon_t = \epsilon \cdot \mu$ (ver tema XIV "Contracción lateral. Coeficiente Poisson")

Luego: $\frac{y}{r} = \epsilon_t = \epsilon \cdot \mu \rightarrow \epsilon = \frac{y}{r \cdot \mu}$

Pero $\epsilon = \frac{\sigma}{E}$ (Ley de Hooke)

luego $\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{y}{r \cdot \mu} \rightarrow \sigma = \frac{E}{r \cdot \mu} \cdot y$ (52)

Y comparando con la (48) resulta

$$\frac{E}{R} \cdot y = \frac{E}{r \cdot \mu} \cdot y \rightarrow R = \mu \cdot r$$
 (53)

4. Módulo y momento resistente

En la práctica se suelen presentar dos casos: proyecto y dimensionado de una pieza o verificación de la misma. Supongamos tener la viga de la Fig. 43. Sabemos el tipo de material que utilizaremos luego conocemos el σ_{ad} . Por otro lado tenemos la forma geométrica de la viga que queremos construir y sus cargas y por consiguiente podemos hallar el M_{fmax} . Luego debemos aplicar para el proyecto y el dimensionado la (51) pero desconocemos I_{nn} e y_{max} . Transformamos la (51) de la siguiente forma:

$$\sigma_{ad} = \frac{M_{fmax}}{\frac{I_{nn}}{|y_{max}|}} = \frac{M_{fmax}}{W} \quad (54)$$

El valor W se llama módulo resistente. Si el material con que estamos trabajando fuera madera (Fig.47), por ejemplo, resultará:

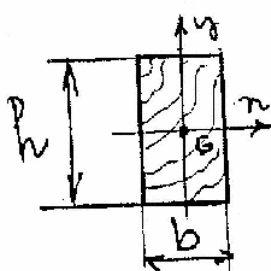


FIG. 47

$$I_{nn} = \frac{bh^3}{12} \quad \text{e} \quad y_{max} = \frac{h}{2}$$

$$\text{luego } W = \frac{bh^3}{12} \cdot \frac{2}{h} = \frac{bh^2}{6} \quad (55)$$

Aplicando las (54) y (55)

$$W = \frac{M_{fmax}}{\sigma_{ad}} = \frac{bh^2}{6} \quad (56)$$

Luego eligiendo un valor de b y conociendo W puedo despejar h de la (56) y dimensionar así la pieza.

Si el material fuera acero (Fig. 48) aplicando la (54):

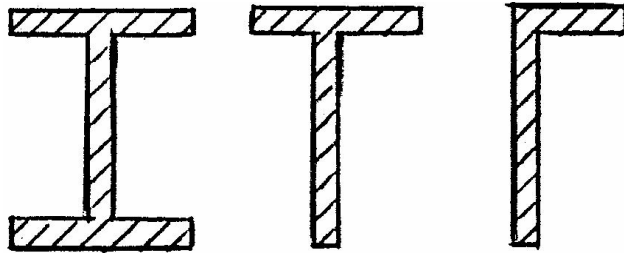


Fig. 48

tenemos

$$W = \frac{M_{fmax}}{\sigma_{ad}} \quad (57)$$

luego con la ayuda de un manual de acero elegiré de acuerdo a las secciones de Fig. 48 que quisiera utilizar un W que sea igual o superior al dado por la (57).

Si por el contrario ya tengo la forma y las dimensiones de la sección de la pieza y sé de que material está hecha conozco entonces el W y el σ_{ad} luego de la (54) resultará:

$$M_{fmax} \text{ (admisibile)} = W \cdot \sigma_{ad} \quad (58)$$

El valor que obtengo de la (58) es el máximo momento admisible que la pieza puede soportar y se lo denomina Momento resistente y por consiguiente deberá resultar

$$M_{fmax} \text{ (calculado)} \leq M_{fmax} \text{ (admisibile)}$$

El M_{fmax} (calculado) puede ser por ejemplo el hallado con el estado de cargas de la figura 43.

5. Flexión Oblicua

Este punto si se ha entendido bien la flexión simple normal y el principio de superposición puede resultar muy fácil.

Supongamos entonces que estamos en presencia de un caso de flexión oblicua como el indicado en la Fig. 39 c. Aplicando el principio de superposición podemos tratar de flexión simple oblicua como la suma de dos flexiones simples normales descomponiendo el M_f en los planos normales que contengan los ejes principales de inercia de la sección como se indica en la figura 49.

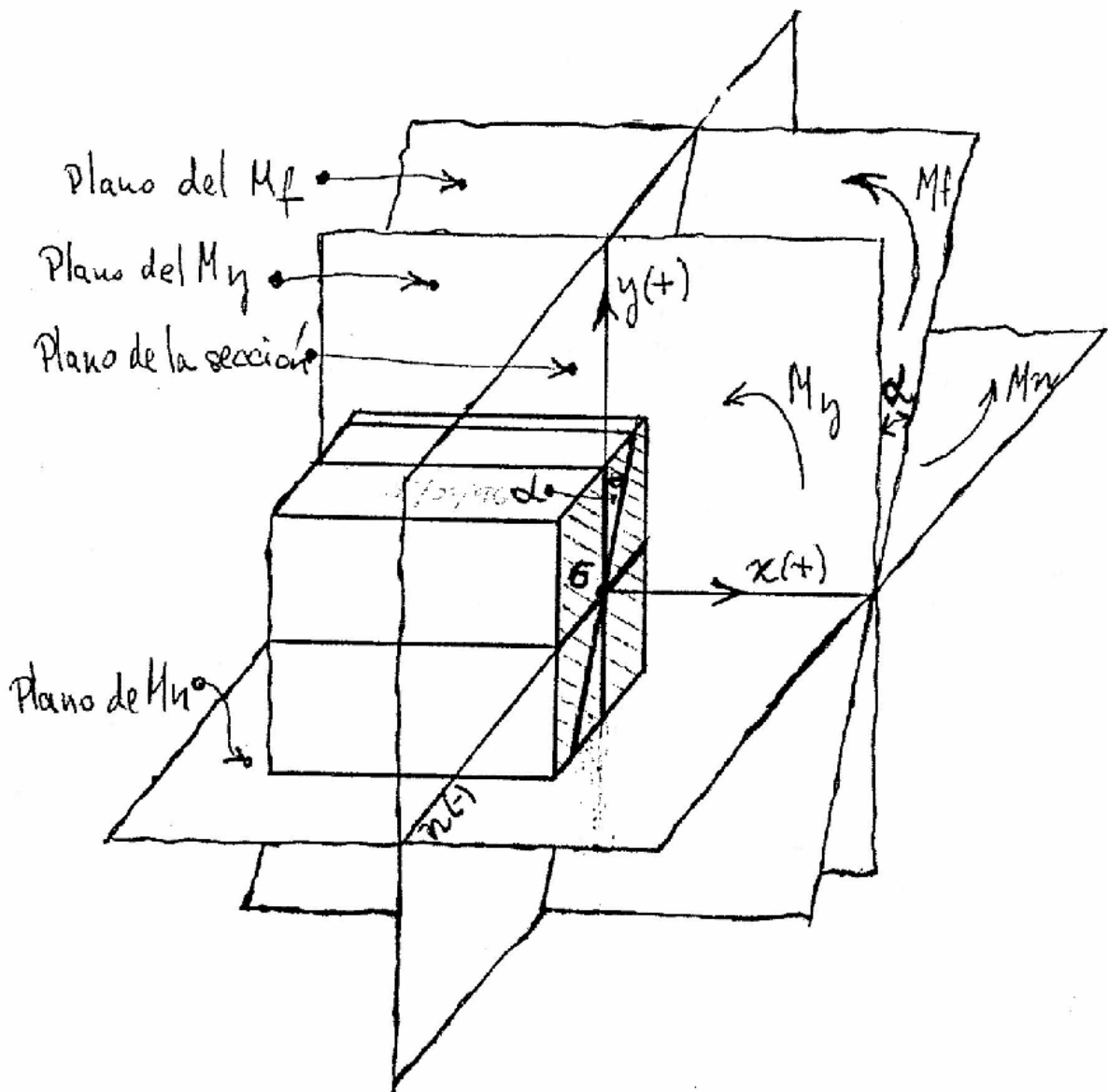


Fig. 49

Resulta entonces

$$M_y = M_f \cdot \cos \alpha$$

$$M_n = M_f \cdot \sin \alpha$$

Siendo el ángulo α el formado por el plano normal a la sección que contiene al eje principal de inercia "y" y el plano normal a la sección que contiene al M_f .

Aplicando el principio de superposición y teniendo en cuenta la (50) resultará:

$$\sigma = \sigma_y + \sigma_n = -\frac{M_y}{I_{nn}} \cdot y - \frac{M_n}{I_{yy}} \cdot n$$

I_{yy} = momento de inercia de la sección con respecto al eje y

$$\sigma = -M_f \left(\frac{\cos \alpha}{I_{nn}} \cdot y + \frac{\sin \alpha}{I_{yy}} \cdot n \right) \quad (59)$$

La (59) nos da el valor de la tensión normal σ en cualquier punto de la sección conforme a los convenios de signos hechos en flexión simple normal. Desde un punto de vista de la geometría la (59) es la ecuación de un plano que pasa por el origen de coordenadas.

Nos podemos preguntar sobre el eje neutro que es el lugar geométrico de los puntos de la sección en los cuales $\sigma = 0$

Evidentemente lo hallamos igualando a 0 la (59) y por ser $M_f \neq 0$ resulta:

$$\frac{\cos \alpha}{I_{nn}} \cdot y + \frac{\sin \alpha}{I_{yy}} \cdot n = 0 \quad (60)$$

La (60) es la ecuación de una recta que pasa por el origen de las coordenadas n - y, luego es suficiente hallar otro punto para determinar la recta y trazar así el eje neutro.

Algunas bibliografías tratan este tema desde un punto de vista vectorial que tal vez se ajusta mejor a la manera de estudiar de los estudiantes de ingeniería eléctrica. Veamos como se puede hacerlo: supongamos la sección de la viga y en la que hemos marcado la traza del plano que contiene al M_f y que forma un ángulo α con el plano que contiene al eje principal de inercia y (Fig. 50).

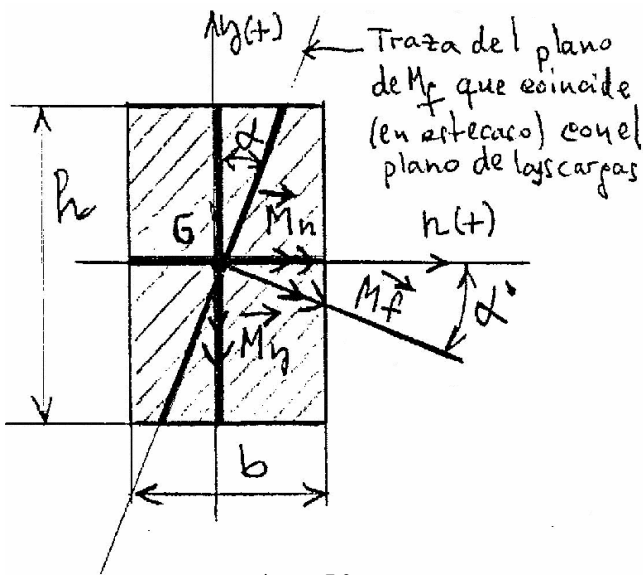


Fig. 50

Marquemos el vector \vec{M}_f y descompongámoslo en dos vectores componentes según los ejes \underline{n} e \underline{y} . Obtenemos:

$$\vec{M}_y = \vec{M}_f \cdot \cos \alpha \quad (61)$$

$$\vec{M}_n = \vec{M}_f \cdot \sin \alpha$$

Para hallar las tensiones normales podemos utilizar nuevamente la fórmula (50) y el principio de superposición.

Luego resultará:

$$\sigma = \sigma_y + \sigma_n = -\frac{M_n}{I_{nn}} \cdot y - \frac{M_y}{I_{yy}}$$

Y teniendo en cuenta las (61)

$$\sigma = -M_f \left(\frac{\cos \alpha}{I_{nn}} \cdot y + \frac{\sin \alpha}{I_{yy}} \cdot z \right) \quad (62)$$

Si comparamos la (62) con la (59) vemos que es la misma fórmula y no podía ser de otra manera ya que el fenómeno físico es el mismo y por

consiguiente el resultado debe ser el mismo independientemente del instrumento matemático utilizado o de la nomenclatura usada.-

Finalmente para completar este punto vamos a trazar los diagramas de tensiones parciales y totales según se muestra en la Fig. 50 bis [ver formulas (59) y (62)].-

