

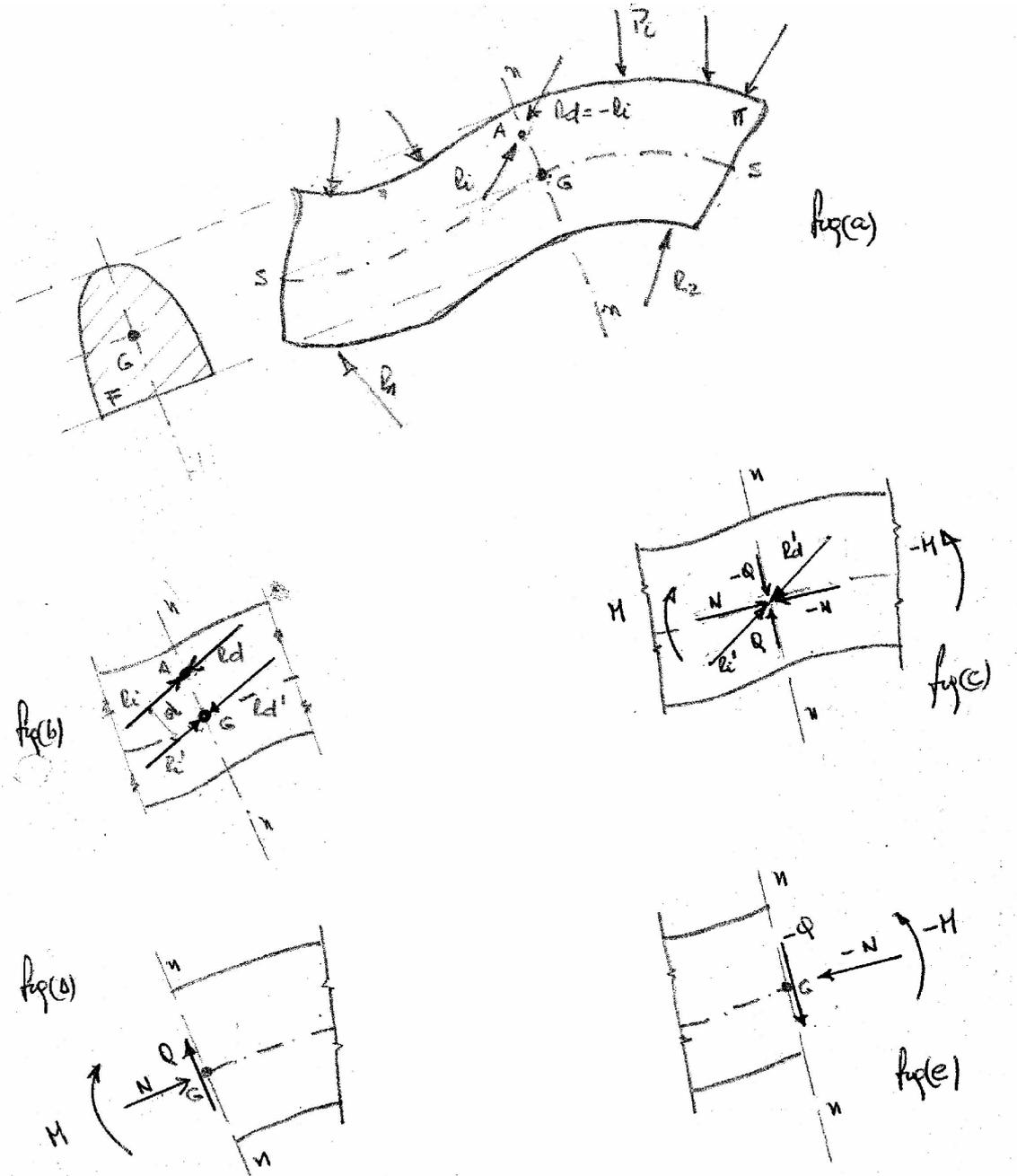
# TEORÍA

## TEMA 9

1. Definición de Viga de alma llena
2. Definición de ESFUERZOS CARACTERÍSTICOS (  $M_f$ ;  $Q$ ;  $N$ )
3. Determinación de los esfuerzos característicos
  - i. Concepto de Polígonos de Presiones
  - ii. Caso de fuerzas concentradas (Polígono de presiones)
  - iii. Caso de fuerzas distribuidas (Curva de presiones)
4. Diagrama de esfuerzos característicos
5. Diferente ESTADOS DE CARGAS.
  - i. Viga cargado con una fuerza concentrada vertical en uno de sus puntos.
  - ii. Viga cargada con dos fuerzas concentradas vertical iguales.
  - iii. Ídem tres cargas concentradas.
  - iv. Ídem con varias cargas concentradas verticales cualesquiera
  - v. Viga simplemente apoyada en los extremos que soporta una carga uniformemente distribuida.
6. Relación entre carga distribuida – esfuerzo cortante y momento flector.
7. Diferentes estados de cargas.
  - i. Viga empotrada en un extremo y libre en el otro
    - i. Con una carga concentrada extrema
    - ii. Con varias cargas concentradas.
8. Viga empotrada con carga distribuida uniformemente.
9. Viga con carga distribuida y concentrada simplemente apoyada con un voladizo en uno de sus apoyos.

**Tema 9**  
**VIGAS DE ALMA LLENA**

• DEFINICIONES



Sea la figura (a),  $S - S$  una línea plana contenida en un plano  $\Pi$  y  $F$  una figura cualquiera normal a aquella, que se desplaza en forma tal que su baricentro pertenezca en todo momento a la línea.-

En su desplazamiento, la figura engendrará un sólido, que podemos imaginar como un conjunto de puntos materiales, cuyas distancias relativas se mantienen invariables por el vínculo de la rigidez.

Si la figura es simétrica con respecto al plano  $\Pi$ , el sólido engendrado por la figura al desplazarse a lo largo de  $S - S$ , también será simétrico con respecto a  $\Pi$ .

Si además las fuerzas aplicadas al sólido se hallan simétricamente dispuestas con respecto al mismo plano, cada par de cargas  $P_i'$  y  $P_i''$ , admitirá un resultante  $P_i$  cuya recta de acción se hallará contenida en el plano de simetría de la figura.

Si también, los vínculos son simétricos, sus reacciones podrán ser reemplazadas con fuerza reactivas  $R_i$  actuantes en el plano  $\Pi$ . De ahí que los efectos del estudio del Equilibrio del SÓLIDO podamos REEMPLAZARLO POR UNA CHAPA (Materialización del plano  $\pi$  de simetría) denominado DE ALMA LLENA, sujeto a la acción del Sistema de fuerzas  $P_i$ , contenido en la misma.

Supongamos que la chapa de la figura (a) se encuentra en EQUILIBRIO bajo la acción del sistema de fuerzas  $P_i$ ;  $R_1$  y  $R_2$  activas las primeras y reactivas las dos últimas. Imaginemos una sección  $n - n$  normal a la curva directriz.

Llamamos  $R_i$  a la resultante de las fuerzas que actúan a la izquierda de  $m - n$  (RESULTANTE IZQUIERDA) y  $R_d = - R_i$  (RESULTANTE DERECHA).

Por razones de EQUILIBRIO son dos FUERZAS OPUESTAS que interceptan la sección  $n - n$  considerada, en un PUNTO A.

Al ser trasladada al BARICENTRO  $G$ . obtenemos:

$$\textcircled{P} \left\{ \begin{array}{l} R_i' = -R_d' \\ M_i = R_i \cdot d \\ M_d = R_d \cdot d \end{array} \right. \quad \text{Fig. (b)}$$

A su vez a la fuerza aplicada en el baricentro G ,Ri' y Rd' se las puede descomponer en COMPONENTES NORMALES A LA SECCIÓN y CONTENIDAS EN EL PLANO DE LA MISMA, indicadas con  $\mathcal{N}$  Y  $\mathcal{Q}$  . Fig. (c).

El conjunto de los dos pares M y - M constituye en lo sucesivo en la que DENOMINAREMOS “MOMENTO FLECTOR O FLEXOR”, cuya definición enunciaremos:

Se denomina momento flector M en una sección “el par de pares que actúan normalmente a uno y otro lado de la misma, cuyos momentos corresponden a los momentos con respecto al baricentro de la sección de las resultantes izquierda y derecha y cuyo signo viene dado por el momento de la resultante izquierda o de la derecha cambiado de signos”.

Definiremos como “ESFUERZO DE CORTE O TANGENCIAL” en una sección al conjunto de las dos fuerzas  $\mathcal{Q}$ , cuyas rectas de acción se encuentran contenidas en el plano de aquellas y cuyas intensidades corresponden a las proyecciones de las resultantes izquierda o derecha sobre el plano de la sección y cuyo signo lo define la proyección de la resultante izquierda”.

Finalmente las proyecciones de las resultantes izquierda y derecha normales a la sección nos permite definir “como esfuerzo NORMAL o ESFUERZO AXIAL al conjunto de las dos fuerzas aplicadas al baricentro de la sección considerada, cuya recta de acción son normales al plano de la misma y cuyas intensidades corresponden a las proyecciones sobre dicha dirección de la resultante izquierda y derecha. El signo del esfuerzo normal depende de si la sección resulta solicitada por tracción o compresión.

POR TRACCIÓN (+)

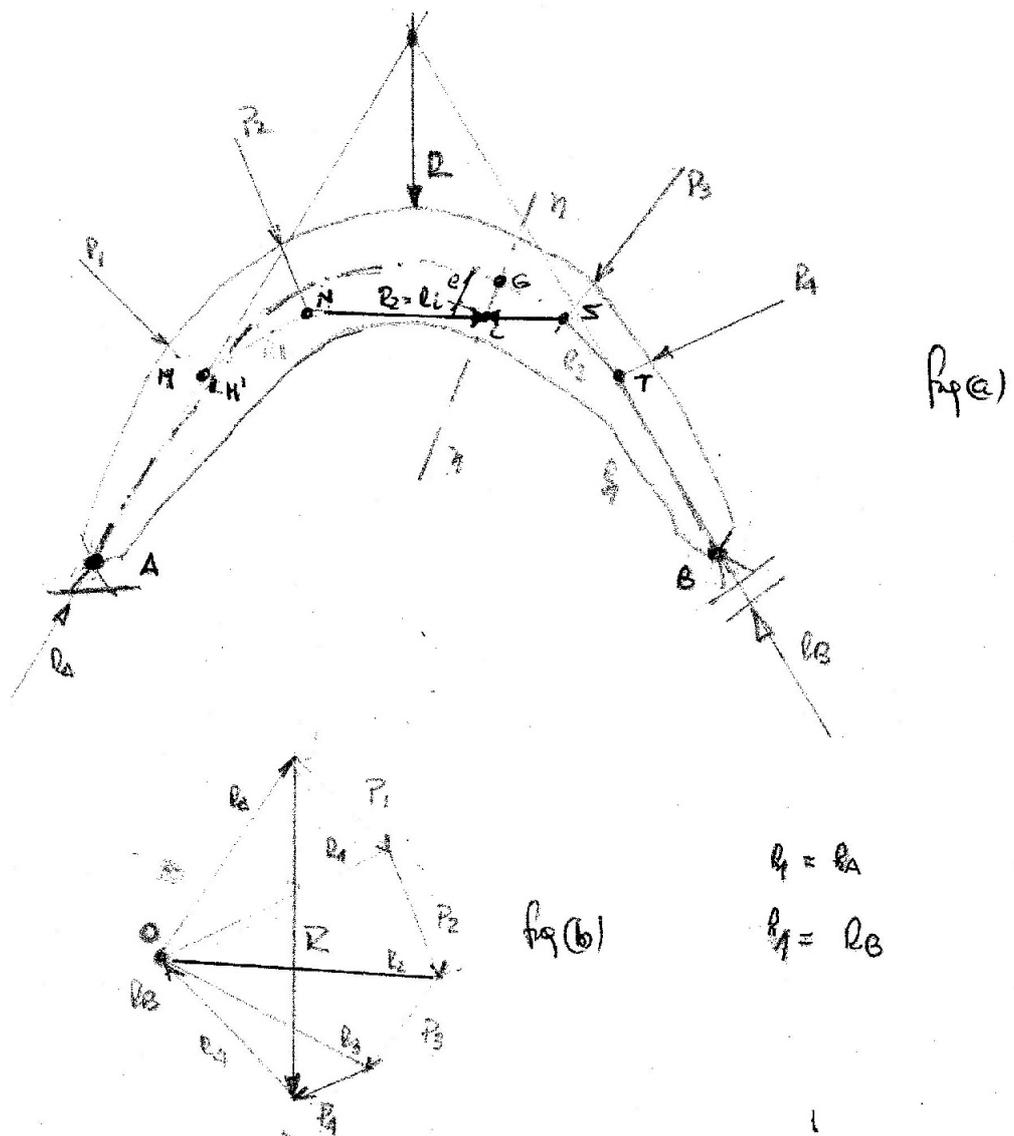
POR COMPRESIÓN (-)

***El esfuerzo de CORTE, el esfuerzo NORMAL y el momento FLECTOR  
CONSTITUYEN LOS TRES ESFUERZOS CARACTERÍSTICOS DE LA SECCIÓN  
CONSIDERADA.***

Ahora si imaginamos SUPRIMIDA la parte de la chapa ubicada a la izquierda de la sección n-n, la parte derecha no se encontrará más en equilibrio; para restituirla será necesario aplicar a la sección una acción equivalente en sus efectos a la parte suprimida, es decir su RESULTANTE IZQUIERDA O BIEN SUS TRES COMPONENTES M; N; Q.

Fig. (d)

- DETERMINACIÓN DE LOS ESFUERZOS CARACTERÍSTICOS



En una chapa de alma llena, sujeta a la acción de un sistema de fuerzas exteriores en equilibrio, en general  $M_f$ ;  $Q$  y  $N$ , varían de sección en sección.

Interesa conocer, pues, como varían de sección en sección los esfuerzos característicos de las mismas.

Considerando el sistema de alma llena de la figura (e), vinculado a tierra con un apoyo fijo en A y móvil en B, sujeto a la acción de las cargas exteriores  $P_1$ ;  $P_2$ ;  $P_3$ ;  $P_4$  y  $R_A$  y  $R_B$  reactivas (calculadas en forma analítica o gráfica).

Trazamos un polígono funicular de las cargas ubicando el polo del mismo en el origen del vector representativo de  $R_A$ , en el polígono de fuerzas.

Si hacemos pasar el primer rayo del funicular por A, el mismo coincidirá con la recta de acción  $R_A$ , por cuanto el primer rayo polar, del que es paralelo, se confunde con el vector representativo de  $R_A$ .

El segundo lado del funicular pasará por M, intersección del primero con la recta de acción de  $P_1$  y será paralela al segundo rayo polar  $R_1$ . El último lado del funicular coincidirá con la recta de acción de  $R_B$ , por ser paralela al último rayo polar, que coincide con el vector representativo de aquella reacción.

***EL POLÍGONO FUNICULAR ASÍ TRAZADO A, M, N, S, T, B, recibe el nombre de POLÍGONO DE PRESIONES*** y para una sección cualquiera, tal como la n – n, el lado del funicular que corta la misma constituye la recta de acción de la resultante izquierda (o derecha) de la sección considerada, estando dadas su INTENSIDAD y SENTIDO POR EL RAYO POLAR CORRESPONDIENTE.

En efecto el primer rayo del funicular coincide con la reacción  $R_A$ , que es la RESULTANTE IZQUIERDA PARA TODAS LAS SECCIONES COMPRENDIDAS ENTRE A Y M' (intersección del eje de la chapa con la recta de acción de  $P_1$ ) por cuando entre ambos puntos no actúa ninguna otra fuerza.

Al pasar a una sección ubicada a la derecha de M', la RESULTANTE IZQUIERDA LA OBTENEMOS DE COMPONER  $R_A$  CON  $P_1$ .

Su recta de acción pasará por M y será precisamente el segundo lado del funicular, por cuanto en el polígono de fuerzas el vector  $R_1$  representativo de  $R_A$  y  $P_1$  coincide con el segundo rayo polar.-

En forma semejante deducimos que LOS RESTANTES LADOS DEL FUNICULAR CONSTITUYEN LAS RECTAS DE ACCIÓN DE LAS RESULTANTES IZQUIERDAS (O DERECHAS) CORRESPONDIENTES A LAS SECCIONES COMPRENDIDAS ENTRE LOS PUNTOS EN QUE LAS RECTAS DE

ACCIÓN DE LAS FUERZAS QUE DELIMITAN EL LADO CONSIDERADO CORTAN EL EJE DE LA CHAPA.

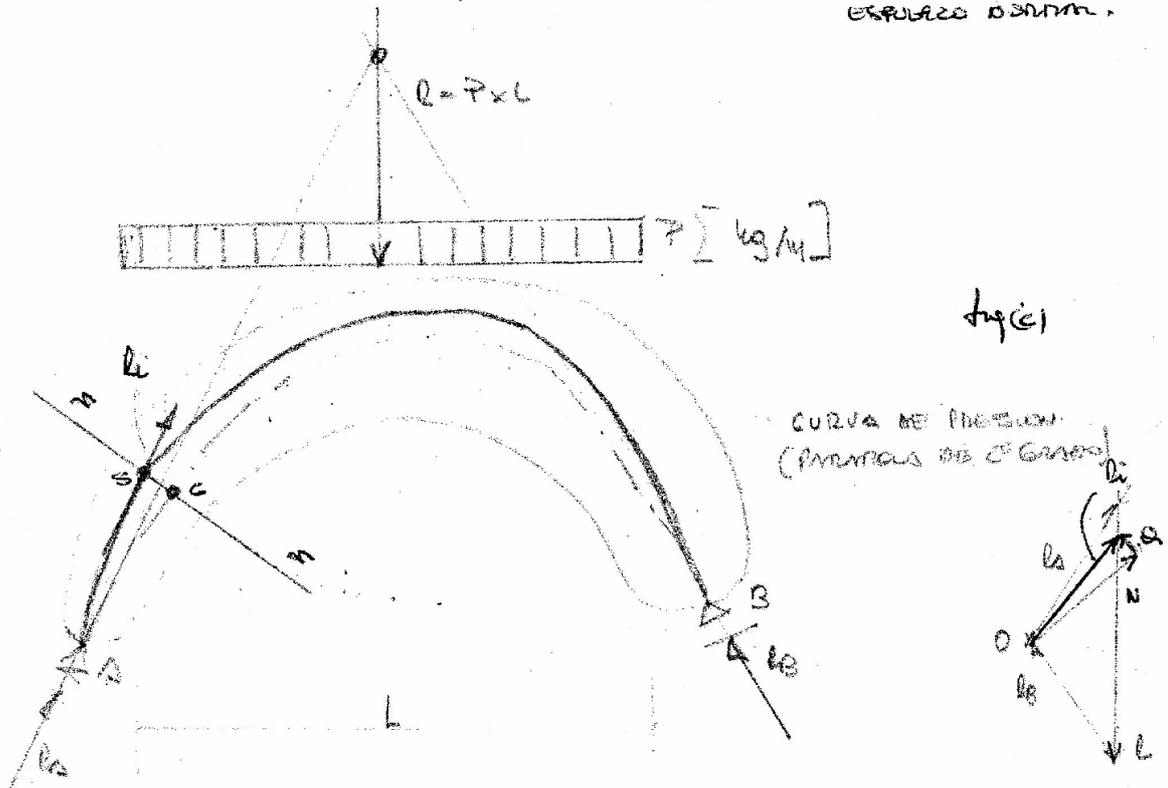
Al considerar la sección n - n a la izquierda se obtiene  $R_2 = R_1$  aplicado en el punto L, que al ser trasladado al baricentro G de la sección y descomponiendo en la normal y tangencial a dicha sección se obtiene:

ESFUERZO  $N$  = NORMAL

ESFUERZO  $Q$  = TRANSVERSAL

$$M = N \times e$$

$e$  = EXCENTRICIDAD DEL ESFUERZO NORMAL.



Si se tratara de un sistema de fuerzas con carga distribuida, el polígono de presiones se transforma en una ***CURVA DE PRESIONES*** que corresponde a la curva del funicular de la carga distribuida, cuyas tangentes extremas pasan por A y B y coinciden además con las rectas de acción de las respectivas reacciones del vínculo.

**En este caso la CURVA FUNICULAR ES UNA PARABOLA DE SEGUNDO GRADO.**

Determinadas las reacciones del vínculo, el trazado de la curva de presiones es inmediata, por cuanto se conocen sus tangentes extremas y los puntos de arranque. El trazado de la parábola se completa con puntos y tangentes.

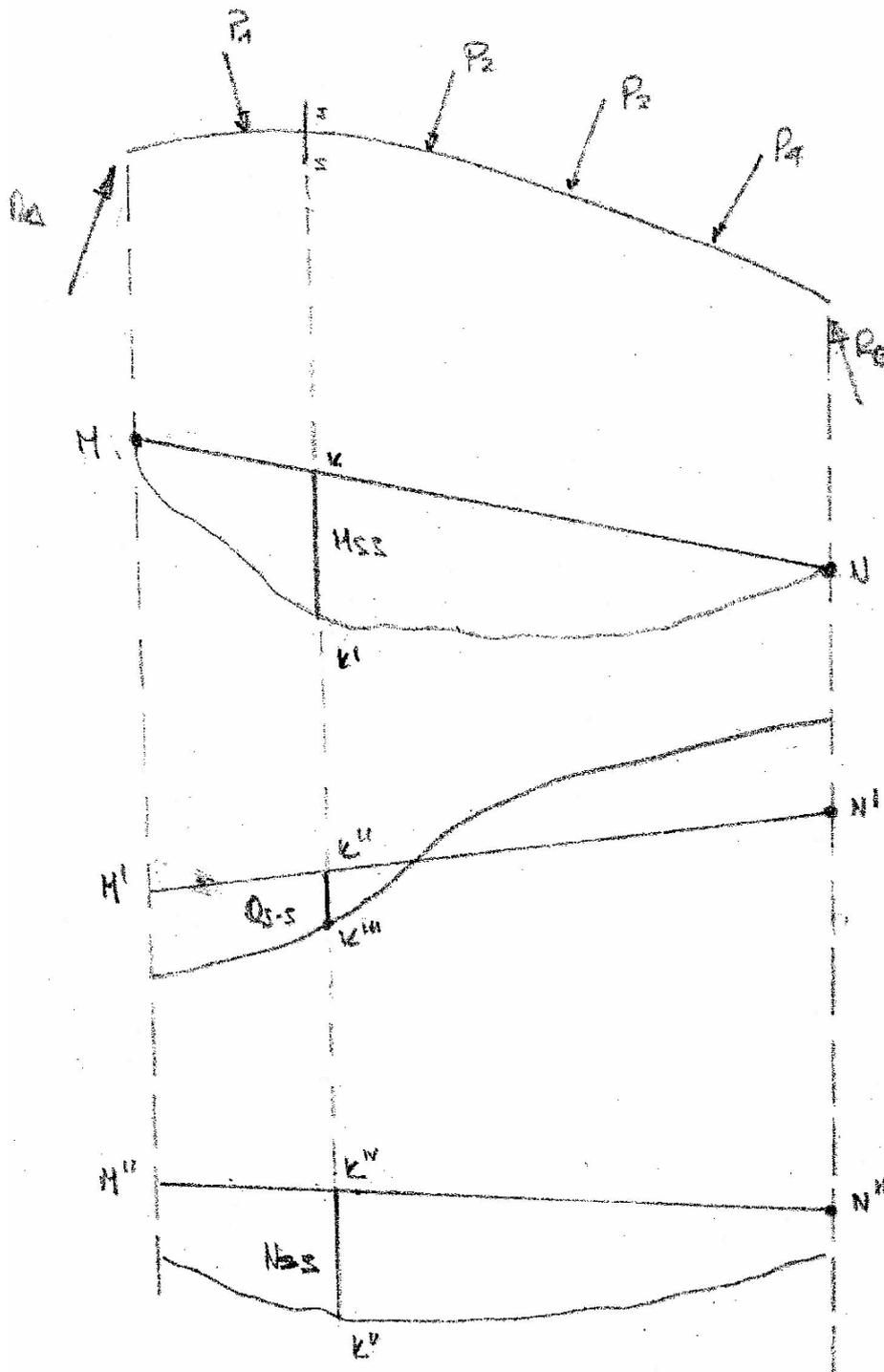
Conocida la curva de presiones, para calcular los esfuerzos característicos, correspondientes a una sección cualquiera, como ser la n – n se traza por el punto S en que la curva corta la sección, una tangente a la primera. Esta TANGENTE CORRESPONDE A LA RECTA DE ACCIÓN DE LA RESULTANTE IZQUIERDA DE LA SECCIÓN.

Trazando por el polo O, en el polígono de fuerzas una paralela a dicha tangente, en su intersección con R, define EL VECTOR REPRESENTATIVO DE Ri:

Descomponiendo Ri en una normal y tangencial a n – n me da:

$$\begin{aligned}
 Q &= \text{ESFUERZO TANGENCIAL} \\
 N &= \quad \checkmark \quad \text{NORMAL} \\
 M &= N \cdot e
 \end{aligned}$$

- DIAGRAMA DE ESFUERZOS CARACTERÍSTICOS



Sea el sistema de alma llena, representado por su eje en EQUILIBRIO bajo la acción del sistema de fuerzas exteriores activas  $P_i$  y reactivas  $R_A$  y  $R_B$ .

Supongamos haber determinado para distintas secciones  $S - S$  del mismo, los valores de  $M, Q, N$ .

Si al partir un eje de referencia cualquiera MN y en una dirección arbitraria (vertical en el caso de la figura), llevamos en correspondencia con lo vertical de cada sección, segmentos de KK- que en una ESCALA DETERMINADA, representen los valores de los correspondientes momentos flectores. EL LUGAR GEOMÉTRICO DE LOS PUNTOS ASÍ OBTENIDOS, CONSTITUYEN UNA FIGURA DENOMINADA “DIAGRAMA DE MOMENTOS FLEXORES”.

Procediendo en forma similar con los esfuerzos de corte y normales es posible construir diagramas análogos para ambos esfuerzos característicos (Fig.).

***Los diagramas de  $M_f$ ;  $Q$ ;  $N$ , permiten OBTENER DE INMEDIATO y PARA CUALQUIER SECCIÓN EL VALOR DEL ESFUERZO CARACTERÍSTICO CORRESPONDIENTE.***

El segmento definido por esta entre el eje de referencia y el diagrama propiamente dicho, leído en la ESCALA CORRESPONDIENTE da el VALOR DE LA CARACTERÍSTICA BUSCADA EN MAGNITUD Y SIGNO. Permiten, además, formarse una composición de lugar sobre la forma en que varían de sección en sección LOS ESFUERZOS CARACTERÍSTICOS Y EN CUALES DE ELLAS ALCANZAN SUS VALORES MÁXIMOS, MÍNIMOS Y NULOS.-

- DIFERENTES ESTADO DE CARGAS:

A. VIGA CARGADA CON UNA FUERZA VERTICAL CONCENTRADA EN UNO DE SUS PUNTOS

- Recordemos que si en un sistema de fuerzas verticales coplanares esta en equilibrio, deben verificarse dos condiciones:

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n F_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_{O_i} F_i = 0 \end{array} \right\} \text{CONDICIONES DE EQUILIBRIO}$$

Y GRÁFICAMENTE:

A. POLÍGONO DE FUERZAS CERRADO.

B. POLÍGONO FUNICULAR CERRADO.

De la condición  $\sum_{i=1}^n M_{O_i} F_i = 0$ ; se deduce que la suma de los momentos de las fuerzas SITUADAS A LA IZQUIERDA DEL PUNTO CUALQUIERA "O" del plano, es igual y de signo contrario a la suma de los momentos de las fuerzas situadas a la derecha.

Esas dos sumas son IGUALES EN VALOR ABSOLUTO.

Si consideramos una VIGA RECTILÍNEA apoyada libremente en A y B y sea P la carga solicitante concentrada en una cualquiera de los puntos de la viga en C, el sistema está en EQUILIBRIO porque los apoyos reaccionan con dos fuerzas  $R_A$  y  $R_B$  cuya resultante es igual y directamente opuesta a la carga P. (ver Fig.)

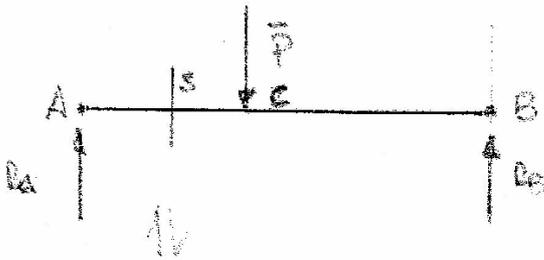
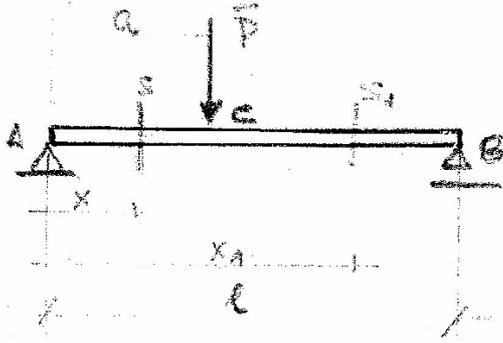
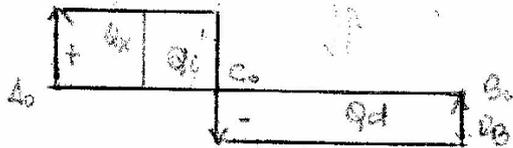
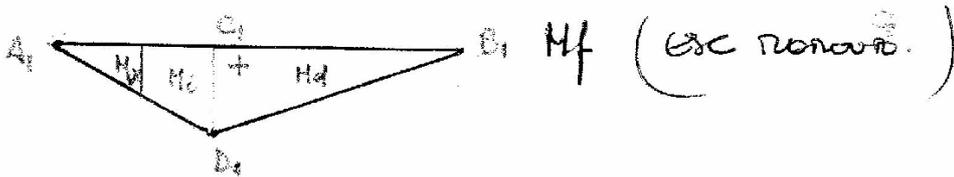


Diagrama por cuerpo libre



Q (ESC FUERZA)



Mf (ESC MOMENTO)

CALCULO DE REACCIONES DE VINCULO:

$$\sum F_i = 0 \Rightarrow R_A - P + R_B = 0 \quad (1)$$

Momento con respecto al punto A

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow P \cdot a - R_B \cdot l = 0 \quad (2)$$

$$\text{de (2)} \Rightarrow \boxed{R_B = \frac{P \cdot a}{l}} \quad \text{al sustituir en (1)}$$

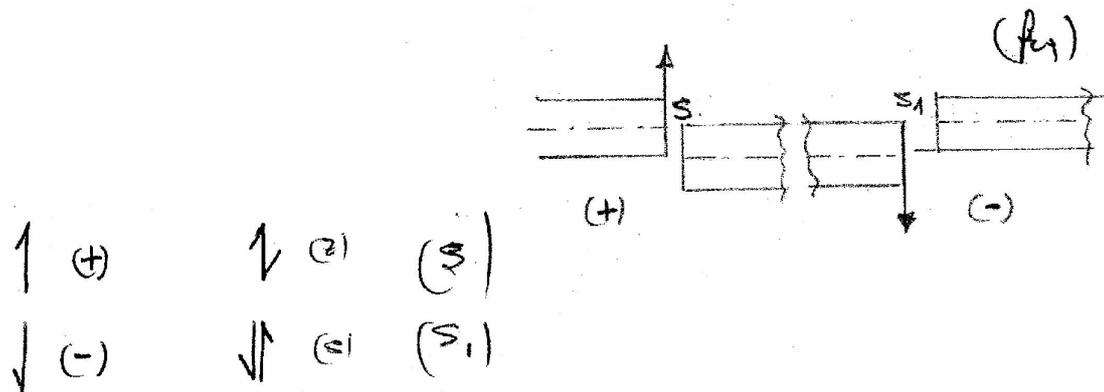
$$R_A = P - \frac{P \cdot a}{l} = \frac{P(l-a)}{l} \Rightarrow \boxed{R_A = \frac{P(l-a)}{l}}$$

Consideremos ahora una sección cualquiera “S” de la viga. Evidentemente ello es solicitado a la IZQUIERDA por la reacción  $R_A$  y a la DERECHA por la fuerza  $P$  y la reacción  $R_B$  con signo cambiado.

Llámesse ESFUERZO CORTANTE en la sección S a la fuerza (o suma de fuerzas) que actúa a la IZQUIERDA, igual y de signo contrario a la fuerza (o suma de fuerzas) que actúa a la derecha.

En efecto la sección S, con respecto a otra sección infinitamente cercana, tiende por la acción de las fuerzas situadas a su izquierda y a su derecha a RESBALAR (se corta en la sección S).

En cuanto al signo, se considera POSITIVO, si el brazo de la viga situada a la izquierda de la sección S tiende a SER ELEVADO CON RESPECTO AL BRAZO SITUADO A LA DERECHA Y NEGATIVO EN CASO CONTRARIO. (Fig.)



$$Q_i = P_s$$

$$\rightarrow Q_i = \frac{P(l-a)}{l}$$

De acuerdo a la expresión, de arriba, en toda sección "S" tal que "x" sea menor a "a", ( izquierda de P ), el esfuerzo de corte  $Q_i = R_a$

En toda la sección S<sub>1</sub>,  $x > a$ , en toda sección situada a la derecha de P, el ejemplo de corte es:

$$Q_d = -R_B - (+R_B) \quad \uparrow +$$

$$Q_d = -\frac{P \cdot a}{L}$$

Resulta entonces que el esfuerzo de corte entre A y C; y C y B es constante.

- Además las tres fuerzas P; R<sub>A</sub> y R<sub>B</sub>, actúan con diferentes brazos con respecto a una sección cualquiera de la viga, pero como están en equilibrio, la suma ALGEBRAICA DE SUS MOMENTOS con respecto a la sección considerada debe ser cero. (Es decir el  $M_{f_{izquierda}} = -M_{f_{derecha}}$ ).

En cuanto a los signos se considera POSITIVOS los momentos de las fuerzas de la izquierda que tienden a producir un movimiento en el sentido de las agujas del reloj y NEGATIVO, los que tienden a producirlo en sentido contrario.

$$\left[ M_c = R_a \cdot x \rightarrow \frac{P \cdot (l-a)}{l} \cdot x \right] \text{ Momentos positivos } x < a$$

$$\left[ M_d = R_B \cdot (l-x) \rightarrow \frac{P \cdot a}{l} \cdot (l-x) \right] x > a$$

$\rightarrow x=0 \quad M=0$  Momentos iguales  
 $x=l \quad M=0$  ✓ correcto..

- Su valor MÁXIMO corresponde al valor  $a$  de  $x$   
(Punto de aplicación de  $P$ )

$$M_{\text{Máx}} = P_{\text{Máx}} a \quad (*)$$

$$* \quad M_i = \frac{P(l-a)}{l} \cdot x$$

$$x \rightarrow a \rightarrow M_i = M_{\text{Máx}} = \frac{P(l-a)}{l} \cdot a$$

$$x \rightarrow a \rightarrow M_d = \frac{P \cdot a}{l} (l-x) = \frac{P \cdot a}{l} (l-a) = \frac{P(l-a)}{l} \cdot a$$

$$* \quad \frac{P(l-a)}{l} \cdot a = \frac{P \cdot a \cdot (l-a)}{l} \quad (*)$$

#### RESUMEN:

Esfuerzos de corte:

$$Q_i = Q_s = \frac{P(l-a)}{l} \quad \text{para } x < a$$

$$Q_d = -Q_s = -\frac{P \cdot a}{l} \quad \text{para } x > a$$

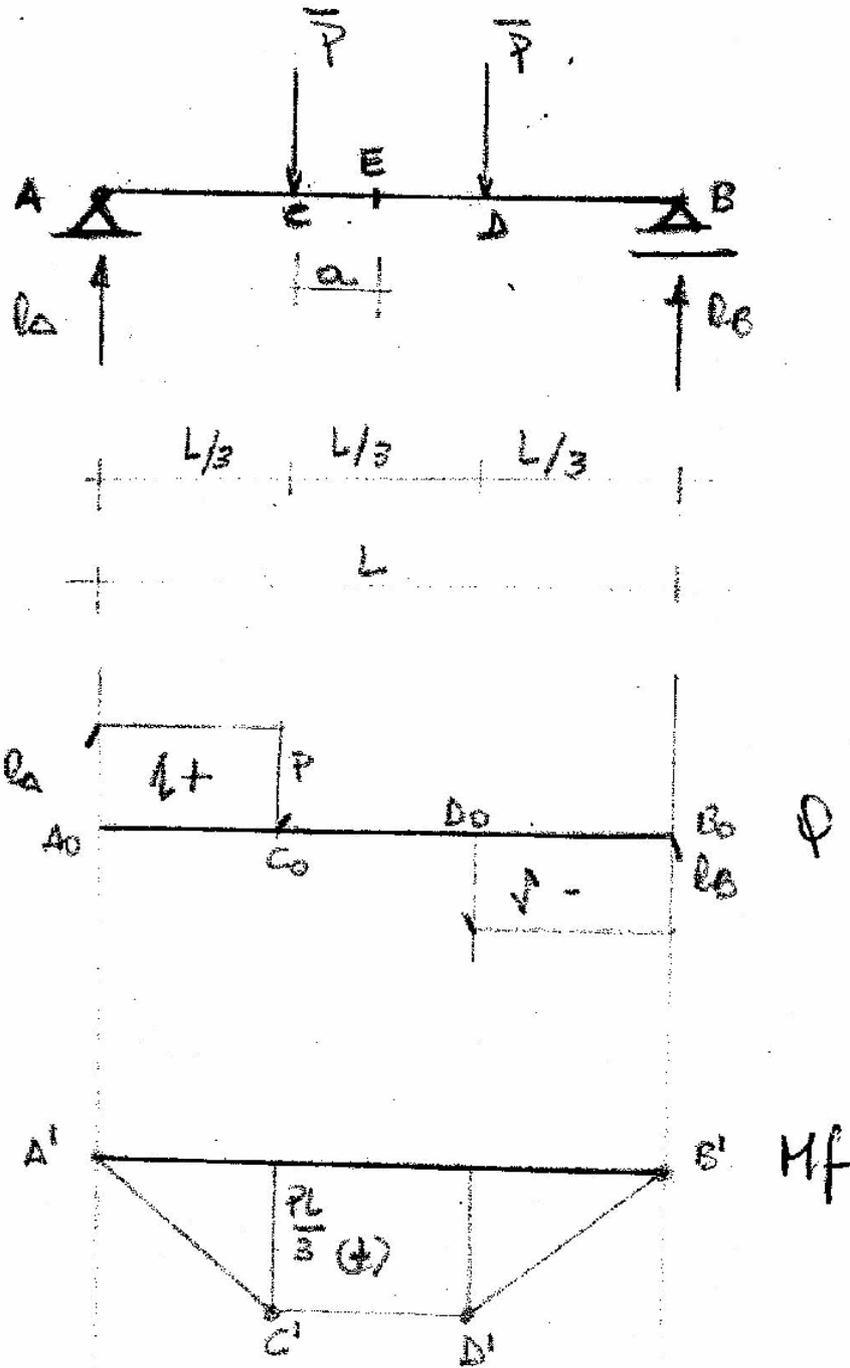
Momentos Flectores:

$$M_i = P_s \cdot x = \frac{P(l-a)}{l} \cdot x \quad \text{para } x < a$$

$$M_d = P_s(l-x) = \frac{P \cdot a}{l} (l-x) \quad \text{para } x > a$$

B. VIGA CARGADA CON VARIAS FUERZAS VERTICALES IGUALES CONCENTRADAS

B – 1 Con dos cargas P iguales concentradas en puntos que dividen la viga en tres partes iguales.



- Las reacciones son:  $R_A - R_B = -P$
- El esfuerzo de corte es el indicado en la figura donde entre los puntos  $C_0$  y  $D_0$  el esfuerzo de corte es nulo.

Para determinar el momento flector tenemos:

$$M_C = R_A \cdot \frac{L}{3} = \frac{P \cdot L}{3} \rightarrow \boxed{M_C = \frac{PL}{3}}$$

Ahora bien entre el apoyo A y C el diagrama del "Mf", varia en forma lineal (pues a la izquierda de cualquier sección entre A y C el momento varia con la distancia de la sección al punto A, ya que la única fuerza actuante es  $R_A$ ).

En el apoyo en A es nulo, el momento flector.

- El momento flector en D es igual al momento flector en C, entre C y D el Mf es constante =  $\frac{PL}{3}$

- En efecto si

tomamos momentos a la izquierda del punto E, las únicas fuerzas actuantes son  $R_A$  y  $P \rightarrow$

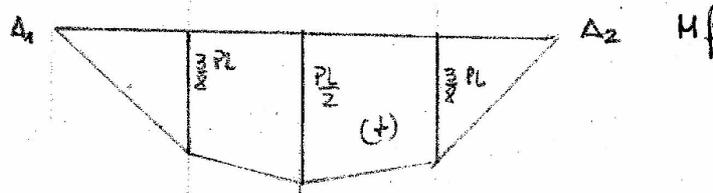
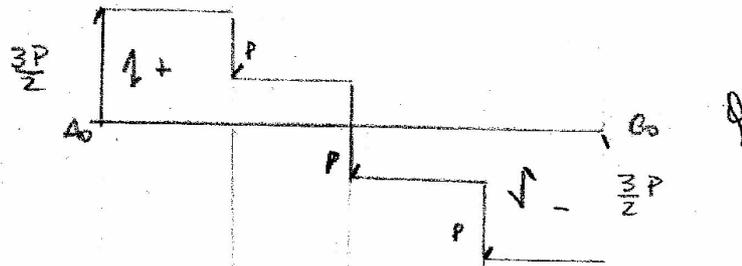
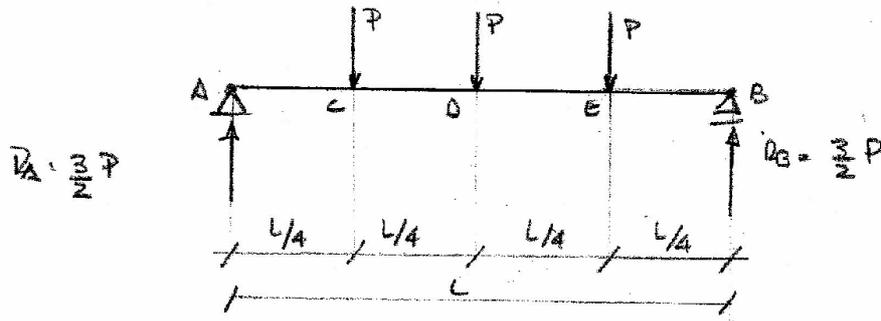
$$M_E = R_A \left( \frac{L}{3} + a \right) - P \cdot a$$

Como  $R_A = P$

$$\boxed{M_E = P \left( \frac{L}{3} + a \right) - P \cdot a = \frac{PL}{3}}$$

- Y entre los puntos D y B el momento flector varia en forma lineal.

B-2: Con tres cargas concentradas iguales a distancias iguales



- Cada reacción vale  $3P/2 \rightarrow$

$$R_A = R_B = \frac{3P}{2}$$

Conocidas las reacciones de vínculos se puede determinar el diagrama de esfuerzo de corte.

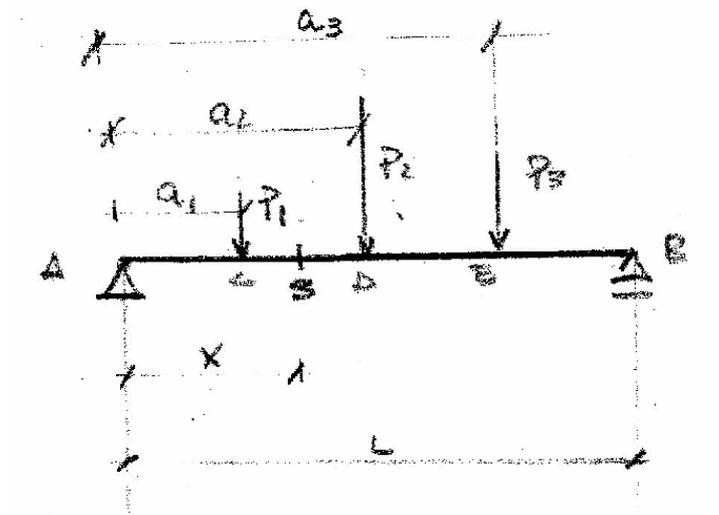
Los momentos en A, C, D, E y B son:

$$\begin{aligned} & [M_A = 0] \\ & [M_C = M_E = \frac{3P}{2} \times \frac{L}{4} = \frac{3PL}{8}] \end{aligned}$$

$$\boxed{M_D = \frac{3}{2} P \frac{L}{2} - \frac{PL}{4} = \frac{PL}{2}}$$

Entre A y C, C y D, D y E, E y B los momentos flectores varían en forma lineal.  
Se determina así el diagrama de momento flector.

C. VIGA CARGADA CON VARIAS CARGAS CONCENTRADAS VERTICALES CUALESQUIERA



Consideremos la viga AB, sobre la cual actúan las fuerzas verticales  $P_1, P_2, P_3$ ; sean  $a_1; a_2; a_3$  las respectivas distancias de las fuerzas al apoyo en A.

Tomando momento en respecto al punto A tenemos:

$$\sum M_A = P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3 - R_B L = 0$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3}{L}$$

Teniendo en cuenta que para el equilibrio debe verificarse:

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow P_1 + P_2 + P_3 - R_A - R_B = 0$$

$$\Rightarrow R_A = P_1 + P_2 + P_3 - R_B$$

- Conocida las reacciones de vínculos y en conjunto con las cargas activas ( $P_1$ ;  $P_2$ ;  $P_3$ ), resulta posible determinar LOS ESFUERZOS CORTANTES que corresponden a distintas secciones de la viga, a la sección S por ejemplo.
- Bastará sumar algebraicamente las fuerzas que actúan a la izquierda de S.

$$Q_x = R_A - P_1$$

y si se quiere determinar a la derecha de S, se tiene

$$Q_x = - (R_B - P_2 - P_3)$$

y ambos valores son naturalmente iguales.

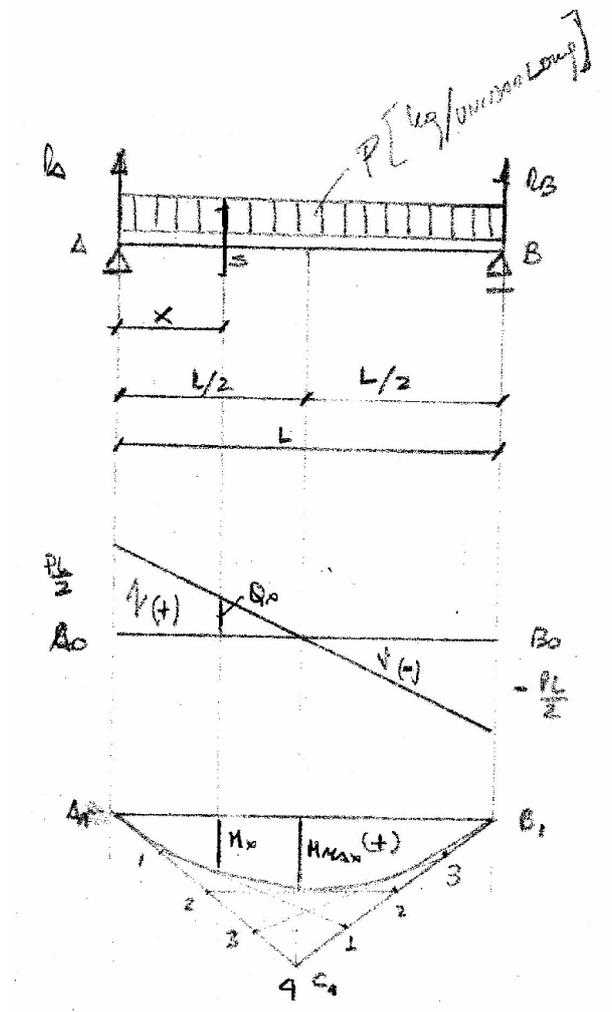
Determinamos ahora el momento flector correspondiente a la sección arbitraria

S:

$$M_x = R_A \cdot x - P_1 (x - a_1)$$

De esta manera se puede determinar los ESFUERZOS CORTANTES y LOS MOMENTOS FLEXORES CORRESPONDIENTES A LAS SECCIONES EN C; D; E y B.

D. VIGA SIMPLEMENTE APOYADA EN LOS EXTREMOS QUE SOPORTA UNA CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA



Trátase de la viga AB que soporta una carga uniformemente distribuida  $\left[ P \text{ kg/unitad de long} \right]$

$$P \times L = P$$

Siendo L la longitud de la viga, el peso total soportado es

Las dos reacciones son evidentemente iguales.

$$R_A = R_B = \frac{P}{2} = \frac{P \times L}{2}$$

$$\frac{ql}{2}$$

El esfuerzo de corte en una sección arbitraria S, distante x del apoyo A es:

$$Q_x = R_A - P \cdot x = \frac{PL}{2} - P \cdot x$$

$$\boxed{Q_x = P \left( \frac{L}{2} - x \right)} \quad (1)$$

La ecuación (1) es una función de 1º grado en "x", su gráfico es pues una recta:

Para  $x = 0 \rightarrow$  ESFUERZO DE CORTE MÁXIMO

$$\boxed{Q_{\max} = P - \frac{L}{2}}$$

Para  $x = L \rightarrow$

$$\boxed{Q_{\min} = -P \cdot \frac{L}{2}}$$

El momento flector para una sección cualquiera S, distante x del apoyo en A, se tiene:

$$M_x = R_A \cdot x - P \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{P \cdot L}{2} x - P \frac{x^2}{2}$$

$$\boxed{M_x = \frac{P}{2} (Lx - x^2)} \quad (2)$$

La ecuación (2) es de segundo grado en x, su gráfico es pues una parábola.

La concavidad es dirigida hacia arriba, puesto que es negativo el término en  $x^2$ .

Puede observarse que como  $x \leq L$  el binomio  $Lx - x^2$  es POSITIVO y también  $\frac{P}{2}$  es positivo. Esto me dice que el momento es POSITIVO cualquiera sea la sección de la viga.

En los apoyos  $X=0$  y  $X=L$ , implica  $M_f$  (momento flector) = 0 (cero)

\* Ahora bien, como  $\frac{P}{2}$  es una constante, el VALOR MÁXIMO DE  $M_x$ , corresponde al valor de  $x$  que anula la derivada primera del factor entre paréntesis.

$$M_x = \frac{P}{2} (Lx - x^2) \quad (Lx - x^2)$$

- La derivada de  $(Lx - x^2)$  es  $(L - 2x)$  e igualando a cero resulta

$$2x = L$$

de donde

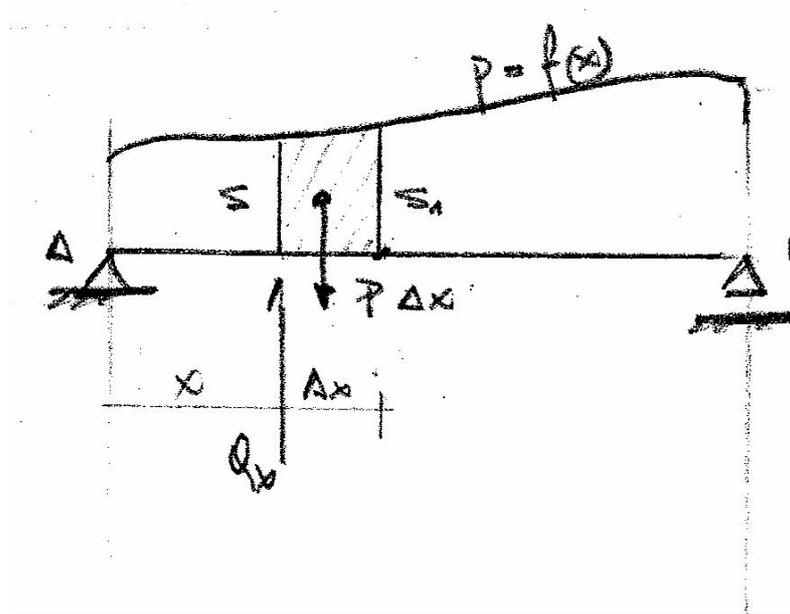
$$x = \frac{L}{2}$$

mitad de la viga

$$M_{MAX} = \frac{P}{2} \left[ L \times \frac{L}{2} - \left( \frac{L}{2} \right)^2 \right] = \frac{P}{2} \left( \frac{L^2}{2} - \frac{L^2}{4} \right) = \frac{P}{2} \frac{L^2}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{MAX} = \frac{P \times L^2}{8}}$$

E. RELACIONES ENTRE CARGA DISTRIBUIDA, ESFUERZO CORTANTE Y MOMENTO FLECTOR.



Trátase de una viga AB, que sostiene una carga continua distribuida según la

función  $p = f(x)$

Consideremos un elemento de viga de longitud  $\Delta x$  y admitamos que sobre el actúa únicamente la carga elemental continua.  $p \Delta x$

Sean  $M_x$  y  $Q_x$  el momento flector y esfuerzo de corte en la sección S de la viga. En la sección  $S_1$ , distante  $\Delta x$  de S, el momento flector se vuelve

$$M_x + \Delta M_x = M_x + Q_x \Delta x - p \Delta x \cdot \frac{\Delta x}{2}$$

$$\Rightarrow \left[ \Delta M_x = Q_x \Delta x - p \Delta x \cdot \frac{\Delta x}{2} \right] \quad \text{dividiendo por } \Delta x$$

$$\frac{\Delta M_x}{\Delta x} = Q_x - p \frac{\Delta x}{2}$$

Entonces en el límite para  $\Delta x \rightarrow 0$  el término  $-p \Delta x/2 = 0$

$$\boxed{Q_x = \frac{dM_x}{dx}} \quad \text{ó} \quad \boxed{Q_x = \frac{d}{dx} M_x} \rightarrow \text{¡MUY IMPORTANTE!}$$

Podemos afirmar entonces que **EL ESFUERZO CORTANTE EN UNA SECCIÓN CUALQUIERA DE LA VIGA ES IGUAL A LA DERIVADA CON RESPECTO A X DEL MOMENTO FLECTOR EN LA MISMA SECCIÓN.**

Si pasamos de la sección S a S<sub>1</sub>, el esfuerzo cortante adquiere un incremento ΔQ igual y de sentido contrario a PΔx

$$\boxed{\Delta Q = -P\Delta x}$$

De donde

$$\boxed{\frac{\Delta Q}{\Delta x} = -P} \quad (1)$$

Y en el límite para  $\Delta x \rightarrow 0$

$$\boxed{\frac{dQ}{dx} = -P} \quad (2) \quad Q = \frac{dM_x}{dx}$$

O también

$$\boxed{-P = \frac{d^2 M_x}{dx^2}} \quad (2)$$

**En consecuencia la CARGA (con signo cambiado) EN UNA SECCIÓN CUALQUIERA DE LA VIGA ES IGUAL A LA DERIVADA CON RESPECTO A X DEL ESFUERZO CORTANTE DE LA MISMA SECCIÓN.**

**También puede decirse, que LA CARGA EN UNA SECCIÓN CUALQUIERA DE LA VIGA ES IGUAL, SALVO EL SIGNO, A LA DERIVADA SEGUNDA DEL MOMENTO FLECTOR EN LA MISMA SECCIÓN.**

Por otra parte, se sabe que cuando **una función PASA POR UN MÁXIMO, SU DERIVADA ES NULA**. Podemos enunciar entonces, el siguiente PRINCIPIO, QUE ES MUY IMPORTANTE.

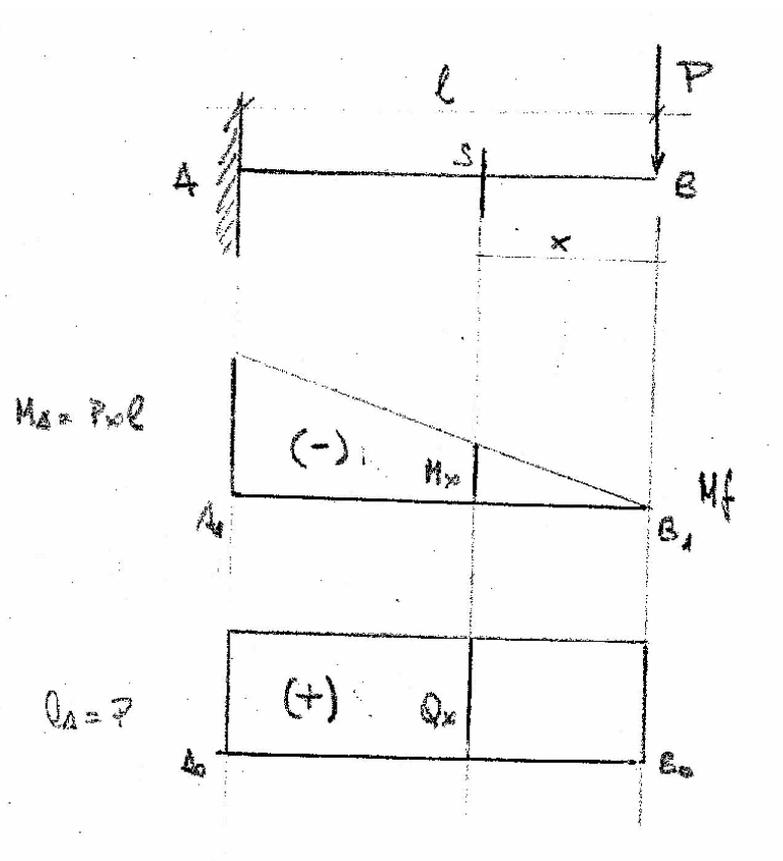
**“EL ESFUERZO DE CORTE O CORTANTE ES NULO PARA LOS PUNTOS DE LA VIGA EN LOS CUALES EL MOMENTO FLECTOR PASA POR**

**UN MÁXIMO”.**

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx}$$

F. VIGAS EMPOTRADAS EN UN EXTREMO Y LIBRES EN EL OTRO.

F.i. Con una sola carga extrema



Consideremos, la viga AB, de longitud  $L$ , cargada con un peso  $P$ , concentrada en un extremo libre.

El momento flector en la sección A (EMPOTRAMIENTO) es NEGATIVA y vale:  $M_A = - PL$

En las sucesivas secciones, el momento flector es tanto más grande cuanto mayor es su distancia "x" a la dirección de la fuerza P.

Es MÁXIMO en "A", que constituye así la sección más peligrosa;

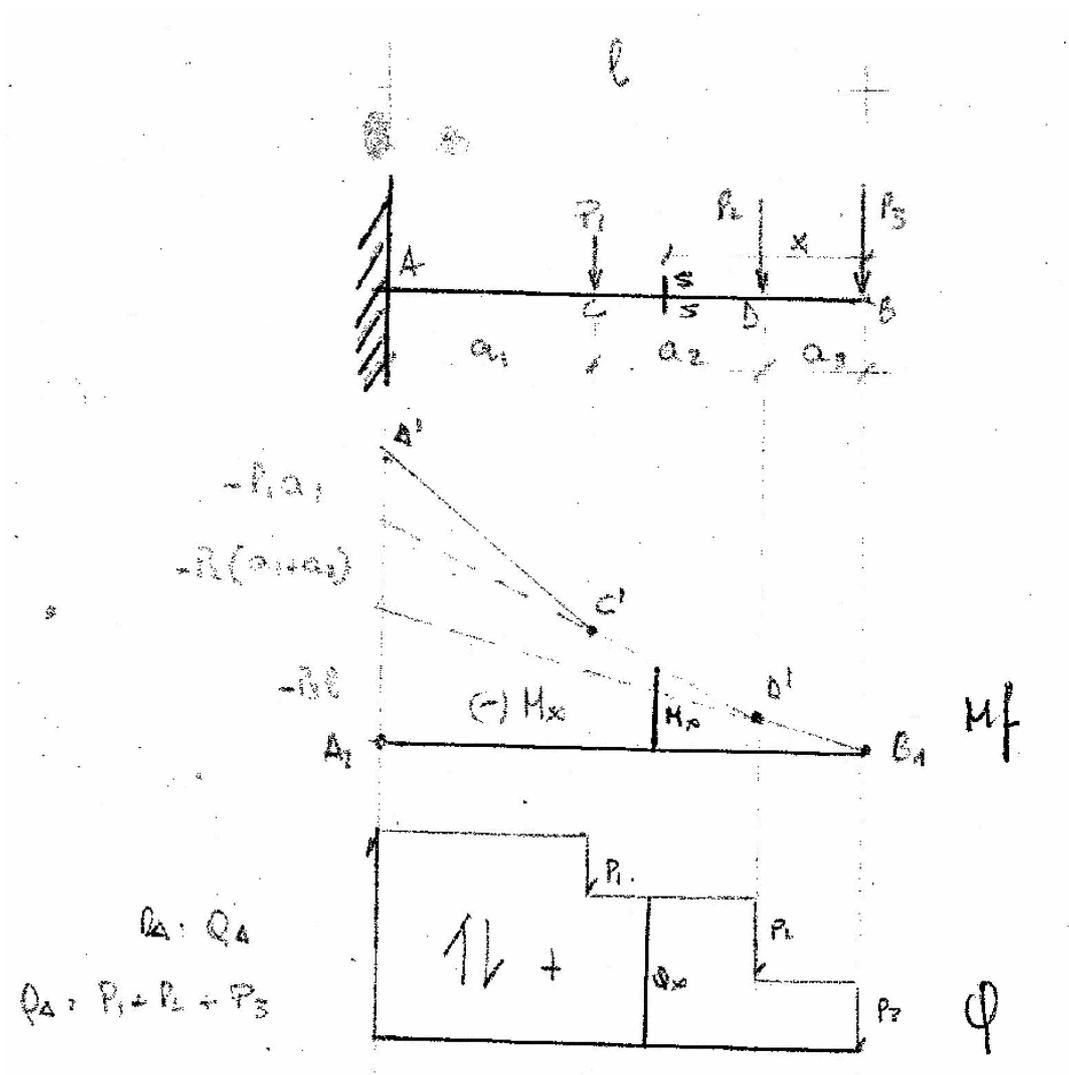
Es nula para  $x = 0$  o sea en B.

El DIAGRAMA DE LOS MOMENTOS FLECTORES DETERMINADOS POR "P" ES TRIANGULAR.

El esfuerzo de corte es constante e igual a P.

$$Q_A = P$$

F.ii. Con varias cargas concentradas



En la sección genérica S, distante x del extremo B, se produce un momento flector que podemos determinar considerando las fuerzas que actúan a la derecha de la sección (todas conocidas) y cambiando el signo, se tiene:

$$M_x = -[+ P_3 x + P_2 (x - a_3)] \quad (-) \quad (+) \quad (+)$$

$$+A \quad Q_x = \begin{matrix} \text{Antes} \\ \text{Después} \end{matrix} \left( \begin{matrix} - P_3 + P_2 \\ - \end{matrix} \right) \quad (+) \quad \uparrow$$

- En otras secciones se tiene:

$$M_B = - (P_3 \times a_3) \quad (-)$$

$$+A \quad Q_B = \begin{matrix} \text{Antes} \\ \text{Después} \end{matrix} (-P_3) \quad (+)$$

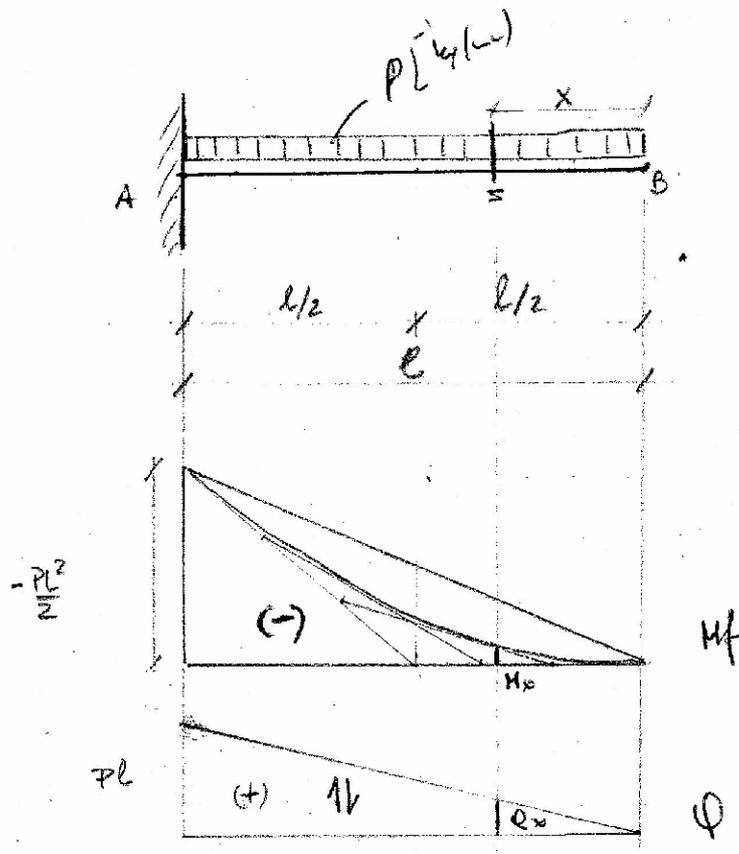
$$M_C = -[+ P_3 (a_2 + a_3) + P_2 a_2] \quad (-)$$

$$Q_C = P_3 + P_2$$

$$M_A = -[+ P_3 l + P_2 (a_2 + a_1) + P_1 a_1] \quad (-)$$

$$+A \quad Q_A = \begin{matrix} \text{Antes} \\ \text{Después} \end{matrix} (-P_3 + P_2 + P_1) \quad +$$

- VIGA EMPOTRADA CON CARGA DISTRIBUIDA UNIFORMEMENTE



Sea la viga AB de longitud L y P la carga por unidad de medida o longitud.

Una sección arbitraria  $S$  distante de  $x$  del extremo libre, es solicitada por el momento de la carga "px", o sea por la porción de la carga total situada a la derecha de la sección, la cual actúa en  $\frac{x}{2}$  brazo

Tenemos entonces.

$$Q_x = Px$$

$$M_x = -\frac{Px^2}{2}$$

El esfuerzo de corte es una función de "x", varía pues en forma lineal.

El momento flector varía en cambio  $x^2$ , es decir con las ordenadas de una parábola de segundo grado.

En la sección de empotramiento es decir  $x = l$  se tiene los VALORES MÁXIMOS DE ESFUERZOS DE CORTE Y DEL MOMENTO FLECTOR.

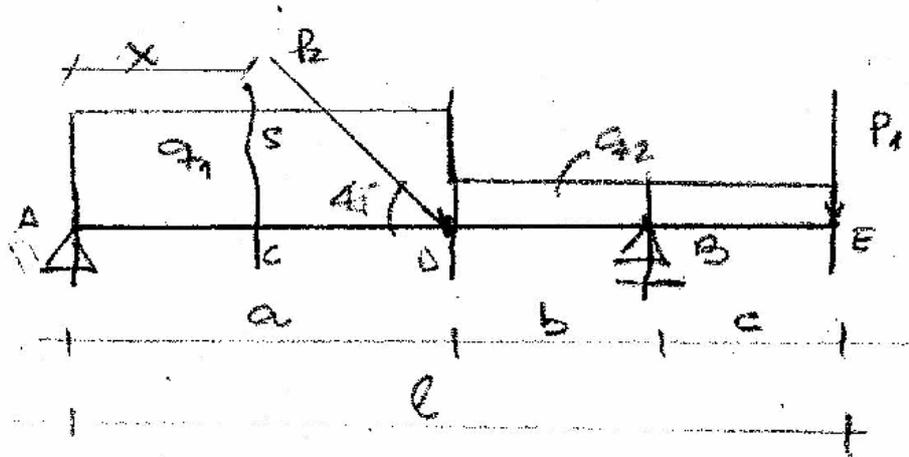
$$Q_{\max} = p l$$

$$M_{\max} = - \frac{p l^2}{2}$$

Las reacciones de empotramiento son:

$$R_s, p l = Q_{\max}$$

- VIGA CON CARGA DISTRIBUIDA Y CONCENTRADAS SIMPLEMENTE APOYADA CON UN VOLADIZO EN UNO DE SUS APOYOS



Sea la viga de la figura AB con voladizo en el apoyo en B con cargas distribuidas  $q_1$  y  $q_2$  y concentradas  $P_1$  y  $P_2$ , vinculadas a tierra en A, en un apoyo doble y en B con un apoyo simple.

Una sección arbitraria S distante "x" del apoyo A se tiene los siguientes esfuerzos característicos.

A. Reacciones de vínculo

$$\sum \overset{\uparrow}{F}_A = 0 \rightarrow -R_B \times (a+b) + q_1 \frac{(a)^2}{2} + \overbrace{q_2 (b+c)}^{\text{FUERZA}} \left[ \overbrace{\left( \frac{a+b}{2} \right)}^{\text{BRAZO}} + a \right] + P_1 \times l + P_2 \text{kuar}^{\circ} \times a = 0$$

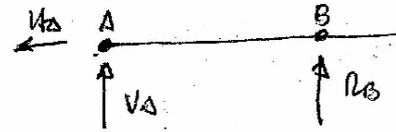
$$\Rightarrow R_B = \frac{q_1 (a^2) / 2 + q_2 (b+c) (a+b) + P_1 l + P_2 \text{kuar}^{\circ} \times a}{(a+b)}$$

$$\sum F_y = 0 \quad V_A - q_1 \times a - q_2 (b+c) - P_1 - P_2 \text{kuar}^{\circ} = 0$$

$$V_A = q_1 \times a + q_2 (b+c) + P_1 + P_2 \text{kuar}^{\circ}$$

$$\sum \vec{F}_x = 0 \rightarrow -H_A + P_2 \cos 45^\circ = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{H_A = P_2 \cos 45^\circ}$$



- Entonces en una sección cualquiera S se tienen los siguientes esfuerzos característicos:

$$\boxed{Q_S = V_A - q_1 x}$$

Función de x (lineal)

$$M_S = V_A x - q_1 x \cdot \frac{x}{2} = V_A x - \frac{q_1 x^2}{2}$$

$$\boxed{M_S = V_A x - \frac{q_1 x^2}{2}}$$

Función de  $x^2$  (parábola)

$$\boxed{N_S = H_A (+) \text{ tracción}}$$

Luego para poder determinar los diagramas de Mf, Q y N se deben calcular dichos esfuerzos en los puntos donde se produzca alguna perturbación.

Ellos son: A; B; D y E.-