TEORÍA

TEMA 8

1. Concepto de BARRA Y ESFUERZO INTERNO EN LAS BARRAS.

2. Materialización de esfuerzo de tracción y compresión

3. Sistema reticulado. Su generación ➔ CONDICIÓN DE RIGIDEZ (Relación entre el número de barras y de vértices).Reticulados simple y compuesto.

4. Determinación de esfuerzos en barra – método de Cullman.

5. Determinación de esfuerzos en barra – método de Ritter.

6. Método de los nudos.

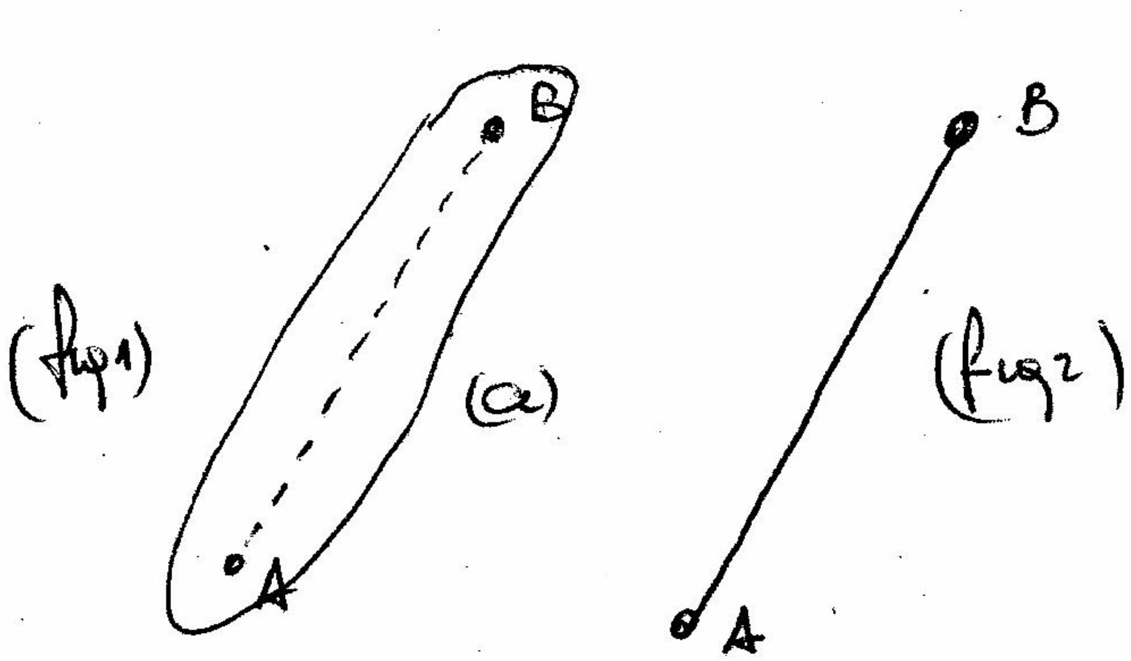
7. Método de CREMONA GRÁFICO.

Tema VIII

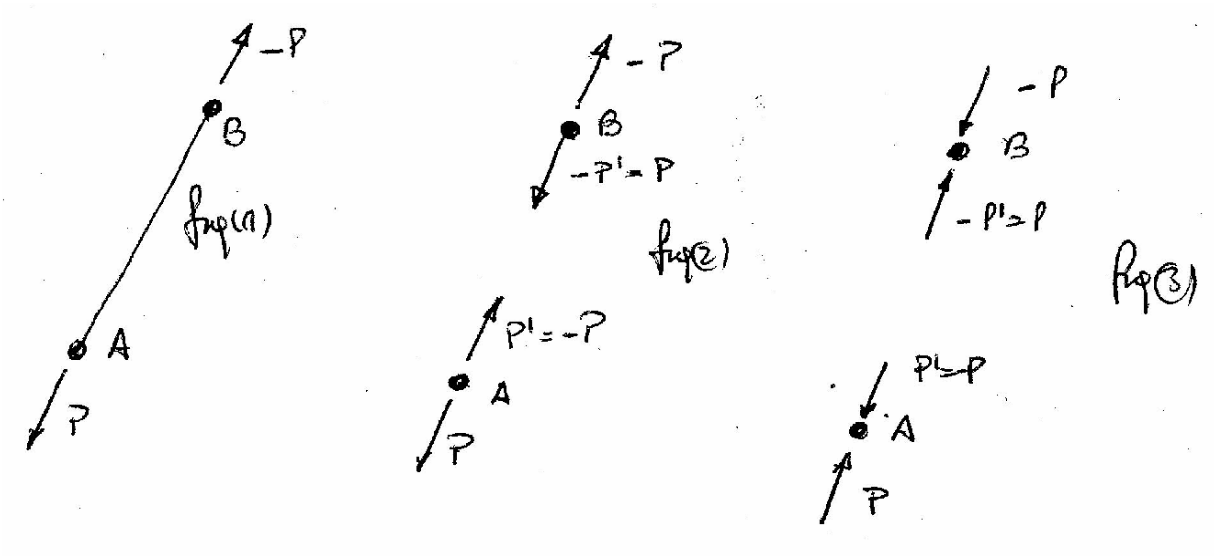
SISTEMAS RETICULARES

- DEFINICIÓN

Se denomina si BARRA a toda chapa cuya dimensión trasversal sea pequeña en relación a su longitud, de modo tal que pueda representarse por su eje. Fig. 1



- Si imaginamos una BARRA LIBRE EN EL PLANO, la misma poseerá tres grados de libertad, la misma de la chapa de la que deriva.
- Consideremos ahora dos puntos "A" y "B" de la barra (Fig. 2), en donde se aplica dos FUERZAS DIVERSAS $\overline{\underline{P}}$ y $-\overline{\underline{P}}$ cuya recta de acción coincide con el eje de la barra. (Fig. 1)
- Por tratarse de un SISTEMA NULO aplicado al cuerpo rígido, el sistema se encontrará en EQUILIBRIO.
- Si ahora suprimimos la BARRA que vincula los puntos A y B, esto al encontrarse sometido a la acción de la fuerza P y –P tenderán a desplazarse en la dirección de las mismas (SE ROMPE EL EQUILIBRIO).
- Para restituirlo, habrá que aplicar a los mismos fuerzas $\boxed{P' = -P}$ y $\boxed{-P' = -(-P) = P}$ que con las anteriores constituirán a su vez SISTEMAS NULOS aplicados a ambos puntos Fig. 2.



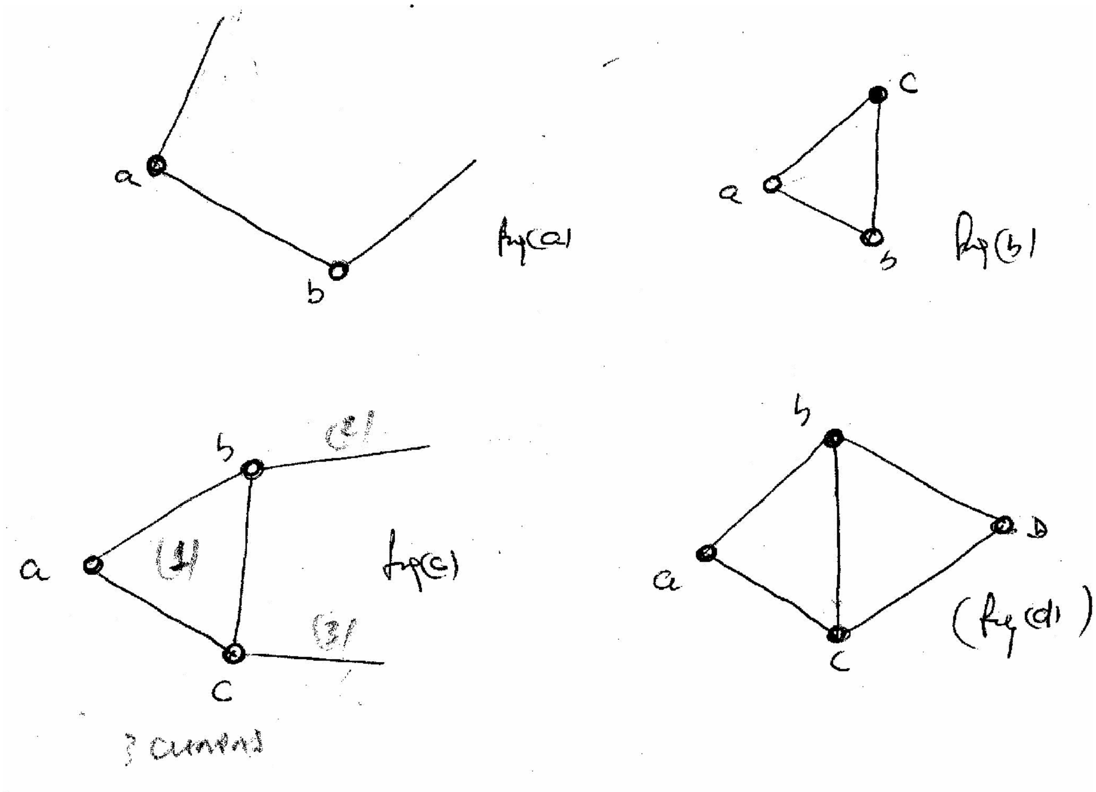
- Estas nuevas fuerzas, que reemplazan en sus efectos a la barra AB, en su conjunto se denominan "ESFUERZOS INTERNOS EN LA BARRA" o más simplemente "ESFUERZO EN BARRA".

- Cuando las fuerzas EXTERIORES que solicitan a la barra tienen SENTIDOS DIVERGENTES, originan en la misma un esfuerzo interno que se denomina ESFUERZO DE TRACCIÓN y que se materializa mediante dos fuerzas que se alejan de los extremos de la barra (denominados nudos). (Fig. 2)

- En cambio si las fuerzas extremas aplicadas en la barra tienen sentido CONCURRENTES, los esfuerzos internos desarrollados en la misma serán de compresión., y se materializan mediante dos fuerzas que concurren al nudo. (Fig. 3)

- Por CONVENCIÓN designaremos como POSITIVOS, los esfuerzos de tracción y como NEGATIVOS, los esfuerzos de compresión.

- <u>SISTEMAS DE RETICULADO. SU GENERACIÓN</u>



- Supongamos la (Fig. (a)), tres barras articuladas entre sí, de modo que constituyan una cadena cinemática abierta, con cinco grados de libertad (3 + 3 + 3 + 2 – 2 = 5)

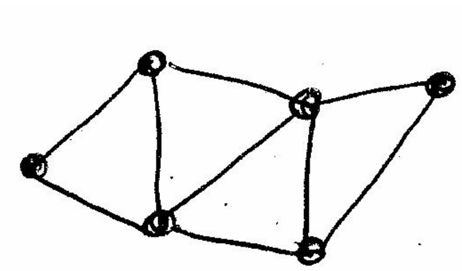
- Si articulamos entre sí las dos barras extremas restringiremos en el conjunto dos grados de libertad, al que quedarán entonces solo TRES GRADOS DE LIBERTAD, COMPORTÁNDOSE COMO UNA ÚNICA CHAPA RÍGIDA.
- Se concluye que <u>“UN TRIÁNGULO FORMADO POR TRES BARRAS RÍGIDAS ARTICULADAS ENTRE SÍ POR SUS EXTREMOS SE COMPORTA COMO UNA ÚNICA CHAPA RÍGIDA E INDEFORMABLE.”</u> (Fig. b).

- Si a dos de cualquiera de los vértices del triángulo, así obtenido, les articulamos dos nuevas barras, el resultado será una nueva cadena cinemática de tres chapas con CINCO GRADOS DE LIBERTAD.

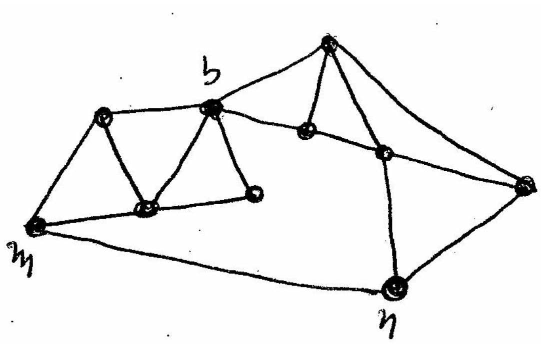
- Articulando entre sí los extremos de las dos barras agregadas al triángulo primitivo, restamos al conjunto DOS GRADOS DE LIBERTAD, con lo que el sistema resultante poseerá únicamente tres, es decir se comportará como una chapa rígida.

Conclusión: agregando pares de barras articuladas entre sí y a vértices del triangulado, obtendremos lo que se denomina un SISTEMA DE RETICULADO.

a) TRIANGULADO SIMPLE



b) TRIANGULADO COMPUESTO



barra n-n vincula dos triangulados simples, rígidos independientemente y articulados entre si por el nudo b.

- <u>CONDICIÓN DE RIGIDEZ. RELACIÓN ENTRE EL NÚMERO DE BARRAS Y DE VÉRTICES</u>

Si llamamos <u>"n"</u> al número de pares de barras que se agregan al TRIANGULO PRIMITIVO, el NÚMERO TOTAL DE BARRAS SERÁ:

$$\boxed{b = 3 + 2n} \quad (1)'$$

Como cada par de barras da origen a un VÉRTICE, EL NÚMERO DE VÉRTICES SERÁ:

$$\boxed{V = 3 + n} \quad (2)$$

Desplazando “n” de la ecuación (2) nos queda:

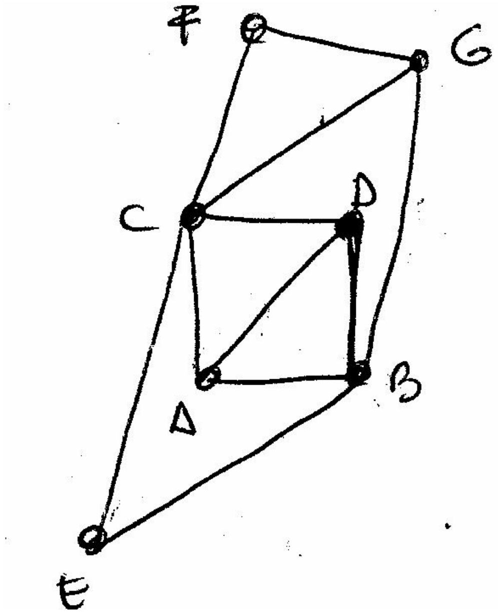
$$\boxed{n = V - 3} \quad (3)$$

- Luego reemplazo n de la ecuación (1) por la expresión (3) y nos queda:

$$b = 3 + 2\,(V - 3) = 3 + 2V - 6$$

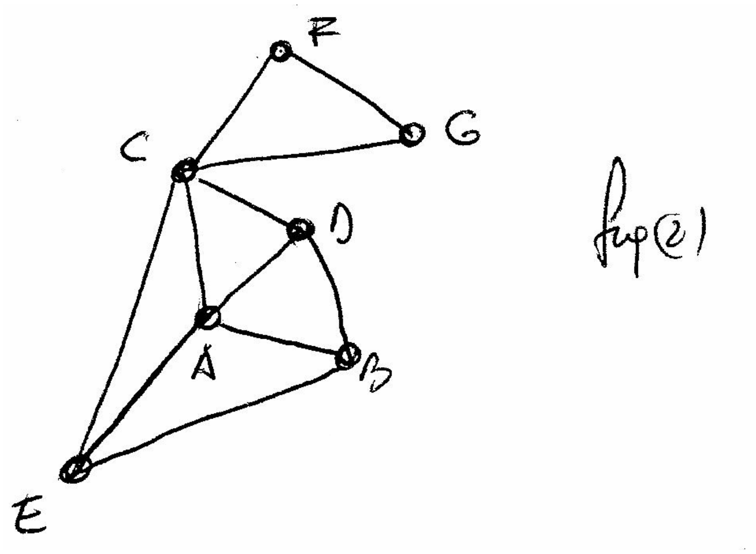
$$\boxed{b = 2V - 3} \quad (4)$$

La ecuación (4) corresponde a la condición de rigidez de un reticulado plano, que establece que para que un reticulado sea estrictamente indeformable, el número de barras (b), del mismo debe ser igual al doble del número de vértices (V) menos tres. Esta condición de rigidez es NECESARIA, pero puede no ser SUFICIENTE. Si la distribución de la barras NO ES LA CONVENIENTE.



Reticulado Rígido e indeterminable

Ahora bien, si suprimo la barra $\overline{GB}$ y coloco la barra $\overline{AE}$, la condición $\boxed{b = 2V - 3}$ seguirá cumpliéndose, pero el sistema no será más indeformable. Fig. (2)



- <u>DETERMINACIÓN DE ESFUERZOS EN BARRAS. MÉTODO DE CULLMAN</u>

  - Si en un sistema reticulado, en EQUILIBRIO bajo la acción de un sistema de fuerzas exteriores aplicadas en los nudos del mismo, SUPRIMIMOS UNA BARRA, EL EQUILIBRIO SE ALTERA.-
  - Para restituirlo es necesario aplicar en los dos nudos en que se articulaba la barra suprimida, fuerzas de igual INTENSIDAD y SENTIDO CONTRARIO, cuya recta de acción coincida con el eje de la barra. Esto nos dice que el CONJUNTO DE LAS DOS FUERZAS MATERIALIZA EL ESFUERZO EN LA BARRA.
  - Entre los distintos procedimientos desarrollados para calcular el valor y signo de los esfuerzos en las barras de los reticulados, existe el denominado <u>"MÉTODO DE CULLMAN".</u>
  - Es un procedimiento GRÁFICO que por su *esencia* supone trabajar simultáneamente con los esfuerzos en TRES BARRAS, CUYOS EJES NO DEBEN SER CONCURRENTES.
  - Consideramos el SISTEMA RETICULADO, sujeto a la acción de las cargas exteriores activas P_1, P_2, P_3.
  - El mismo se encuentra en EQUILIBRIO, por estarlo el conjunto de fuerzas P_1, P_2 y P_3 (ACTIVAS) y RA y RB (REACTIVAS). Fig. 1.-

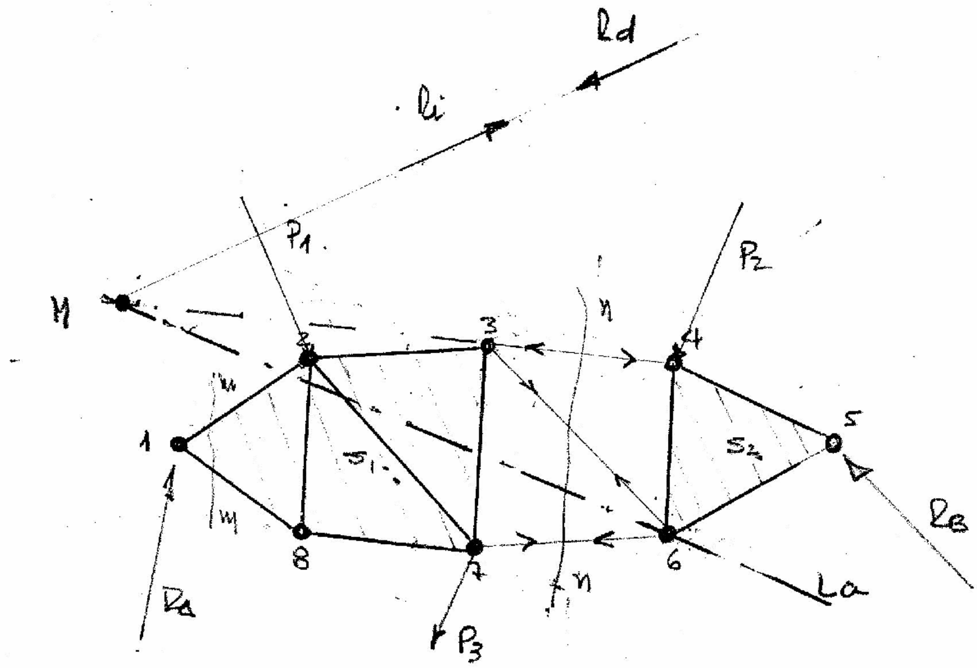


fig 1

R (Resultante de P1 ; P2 ; P3)

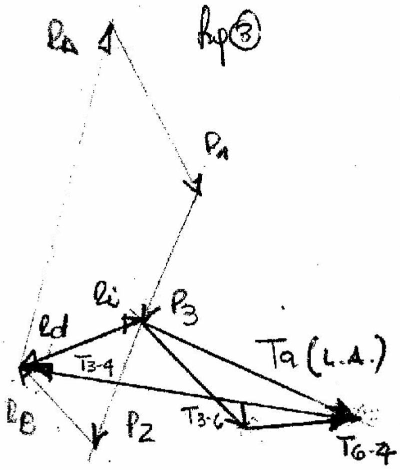


fig 3

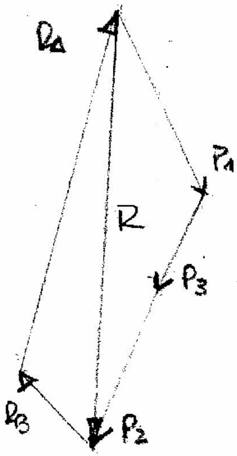


fig 2

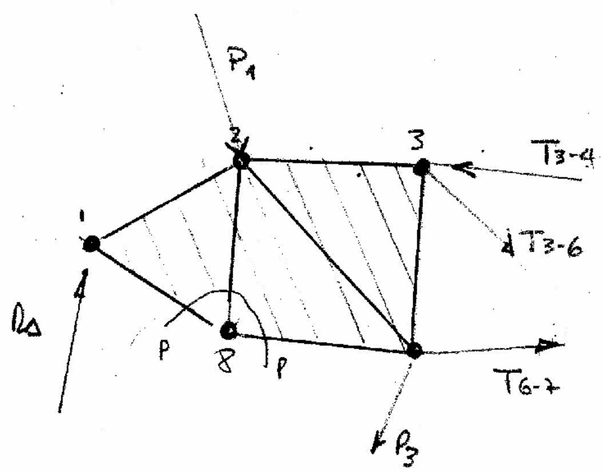


fig 4

Supongamos ELIMINADAS las barras 3 – 4; 3 – 6; y 6 – 7 afectadas por la sección n–n Fig. 1, con lo que el sistema resultará dividido en dos chapas independientes $S_{\underline{1}}$ y $S_{\underline{2}}$, que no se encontrarán en EQUILIBRIO por no estarlo los sistemas de fuerzas que solicitan a cada una de ellas.

Si queremos reestablecer el equilibrio de las chapas será necesario aplicar a cada una de ellas fuerzas que compuestas con las actuantes, originen SISTEMAS NULOS. Dichas fuerzas tendrán por recta de acción los ejes de las barras suprimidas y MATERIALIZARÁN LOS ESFUERZOS INTERNOS EN LAS MISMAS.

En la Fig. 4, hemos considerado la chapa S_1 y agregado a la misma, en los nudos 3 y 7 las fuerzas $T_{3\text{-}4}$; $T_{3\text{-}6}$; y $T_{6\text{-}7}$ dirigidos según los ejes de las barras 3-4; 3-6 y 6-7 respectivamente.

Las fuerzas P_1; P_3 y R_A que SOLICITAN A LA CHAPA 5_1, admitan una RESULTANTE $\underline{R_i}$, que denominaremos RESULTANTE IZQUIERDA Fig. 1, por serlo de las fuerzas que actúan a la izquierda de la sección considerada (5_1).

DICHA RESULTANTE IZQUIERDA DEBE ENCONTRARSE EN EQUILIBRIO CON LAS FUERZAS $T_{3\text{-}4}$; $T_{3\text{-}6}$; y $T_{6\text{-}7}$.

Para hallar la intensidad y sentido de estas últimas fuerzas, bastará descomponer a $\underline{R_i}$ en las direcciones de aquellas, cambiando luego el sentido de los componentes.

En la Fig. 1, se ha utilizado como AUXILIAR DE CULLMAN la recta M-6 definido por el punto M de la intersección de la recta R_i con la correspondiente a la fuerza $T_{3\text{-}4}$; y el nudo 6 al que concurren las fuerzas $T_{3\text{-}6}$; y $T_{6\text{-}7.}$

Para cada una de las barras afectadas por el corte n – n, el conjunto de las dos fuerzas $T_{i\text{-}j}$ materializa el ESFUERZO INTERNO en la barra, su intensidad se obtiene de la descomposición efectuada en el polígono de fuerzas y en cuanto al signo del esfuerzo como $T_{3\text{-}4}$ se acerca al nudo ➔ COMPRESIÓN, mientras que $T_{3\text{-}6}$; y $T_{6\text{-}7}$ se alejan del nudo ➔ TRACCIÓN.

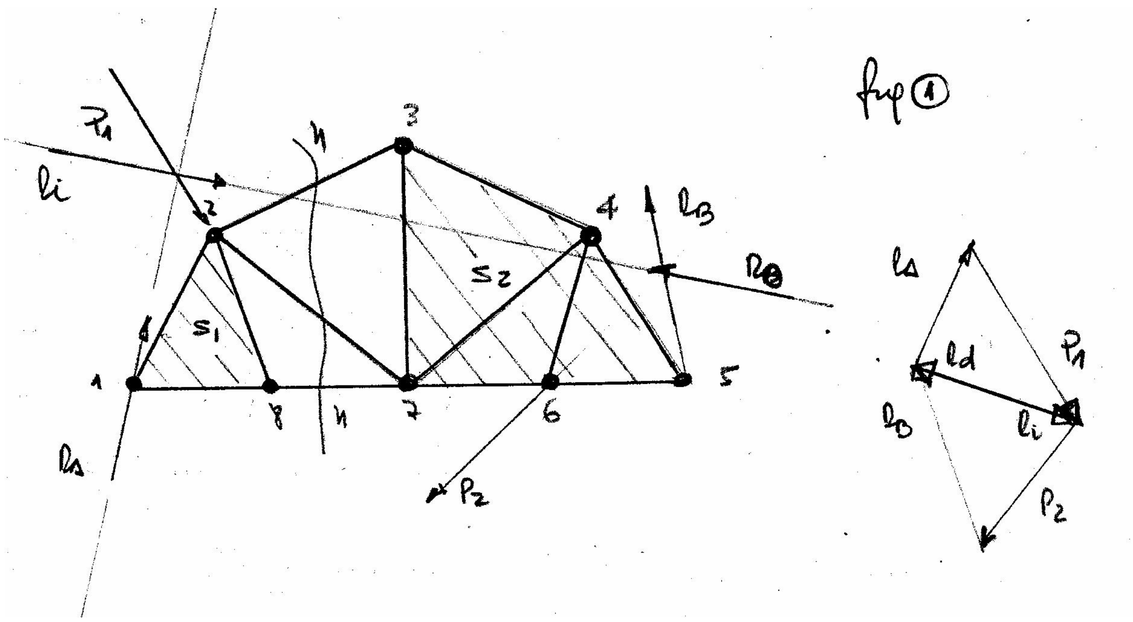
El procedimiento de Cullman es aplicable en aquellos casos en que el corte que afecta las barras divide al sistema de reticulado en dos chapas rígidas vinculadas entre sí por las tres barras mencionadas.

Si el número de barras afectadas por el corte es mayor que tres o si, afectando tres barras, las mismas fueran concurrentes (corte P-P de la Fig. 4) el procedimiento de CULLMAN NO SERÍA APLICABLE.

Si el corte afecta solamente dos barras (corte m-m de la Fig. 1) el procedimiento se reduce a la descomposición de una fuerza en dos direcciones concurrentes.

- <u>DETERMINACIÓN DE ESFUERZOS EN BARRAS. MÉTODO RITTER.</u>

El método de Ritter (o método de los momentos) es simplemente la interpretación GRÁFICA – NUMÉRICA de la descomposición de una fuerza en tres componentes coplanares y no concurrentes.



Consideremos el reticulado de la Fig. 1 en equilibrio bajo la acción de las fuerzas exteriores P_1 y P_2 (ACTIVAS) y R_A y R_B (reactivas).

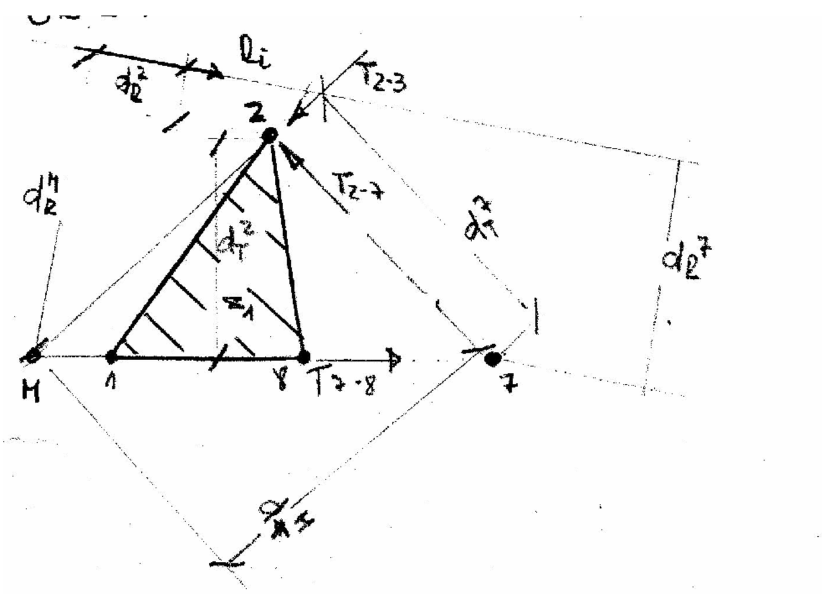
Suprimidas del reticulado las barra 2 – 3; 2 – 7 y 7 – 8, el mismo resulta dividido en dos partes o CHAPAS S_1 y S_2, sujetas a la acción de las resultantes R_i y R_d respectivamente.

La supresión de las barras que constituían el vínculo último ROMPE EL EQUILIBRIO DEL SISTEMA, por lo que será necesario aplicar fuerzas $T_{2\text{-}3}$; $T_{2\text{-}7}$; y $T_{8\text{-}7}$ a cada chapa en los nudos correspondientes y según los ejes de las barras suprimidas, para sustituir el EQUILIBRIO.

Para calcular la intensidad de las fuerzas que actúan según las barras suprimidas, y que con las respectivas resultantes R_i o R_d deben constituir SISTEMAS NULOS, establecemos las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de sistemas planos de fuerzas no concurrentes.

El procedimiento de RITTER consiste en expresar dichas condiciones de equilibrio mediante tres condiciones de nulidad de momentos.

Eligiendo precisamente como centros de momentos puntos para los que se anulen dos de ellos, resultando, en definitiva, tres ecuaciones INDEPENDIENTES CON UNA INCÓGNITA CADA UNA.



fig②

Eligiendo Como centro de momentos el nudo 7, con respecto al mismo se anularán los momentos de las fuerzas T_{2-7} y T_{7-8}, teniéndose:

$$R_i \cdot d_R^7 + T_{2-3} \cdot d_T^7 = 0 \rightarrow T_{2-3}$$

$$\boxed{|T_{2-3}| = \left| \frac{R_i d_R^7}{d_T^7} \right|} \qquad (1)$$

Expresión que nos da el valor absoluto de la fuerza T_{2-3}, aplicada en el nudo 2 según la dirección de la barra 2 – 3. El sentido de esta fuerza surge de la siguiente consideración: el cumplimiento de la ecuación exige que el momento de T_{2-3} respecto del centro 7 sea opuesto al de Ri respecto al mismo punto.

En consecuencia, el sentido de T_{2-3} debe ser tal que conduzca en este caso, a un momento NEGATIVO ((+)).

Con la expresión (1) se determinan la intensidad de la fuerza T_{2-3} y su sentido al ir hacia el nudo ➔ COMPRESIÓN.

Para determinar los esfuerzos a las barras T_{2-7} y T_{7-8}, establecemos condiciones de nulidad de momentos respecto de los puntos M y 2 respectivamente, que conducen a las siguientes ecuaciones.

$$R_i \, d_R^M + T_{2-7} \, d_T^M = 0$$

$$R_i \, d_R^2 + T_{7-8} \, d_T^2 = 0$$

De aquí despejamos los valores de T_{2-7} y T_{7-8}

$$\boxed{|T_{2-7}| = \left| \frac{R_i \, d_R^{M}}{d_T^{M}} \right|} \quad (2)$$

$$\boxed{|T_{7-8}| = \left| \frac{R_i \, d_R^{2}}{d_T^{2}} \right|} \quad (3)$$

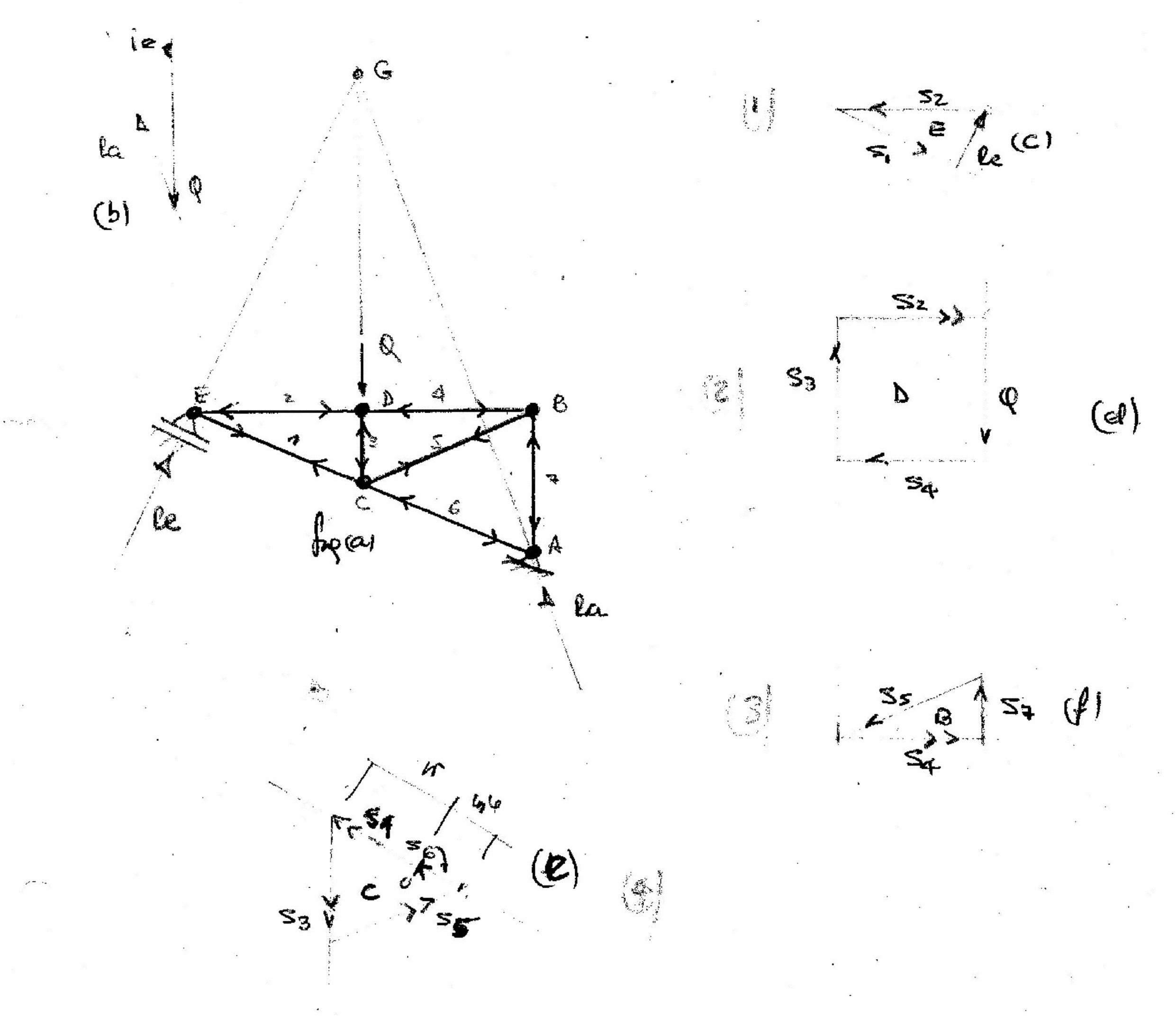
Los signos de ambos esfuerzos de las ecuaciones (2) y (3) se obtienen en la forma explicada y para el caso analizado, resultante:

T_{7-8} = TRACCIÓN (POSITIVO)

T_{2-7} = COMPRESIÓN (NEGATIVO).

Deducimos entonces: que determinamos intensidad, dirección y sentido de cada esfuerzo interno incógnito.

- <u>MÉTODO DE LOS NUDOS</u>
  - ANALÍTICO (MÉTODO DE LAS PROYECCIONES)
  - GRÁFICO



Por acción de la fuerza <u>Q</u>, se originarán reacciones <u>Ra</u> y <u>Re</u> en los puntos de apoyo. La dirección de la fuerza <u>Q</u> aplicado en <u>D</u> es conocida y la reacción <u>Re</u> debe ser normal a la superficie sobre la que se apoyan los rodillos; la reacción <u>Ra</u> en <u>A</u> debe tener la recta de acción de <u>AG</u> que se indica en la Fig. (a).

Las tres fuerzas <u>Q</u> y <u>Ra</u> y <u>Re</u> deben formar también un TRIÁNGULO CERRADO Fig. (b), quedando un sistema cerrado.

Como se ha aplicado estas fuerzas exteriores generan esfuerzos axiales en las distintas barras del reticulado.

Ahora vamos a determinar los distintos esfuerzos en las barras del reticulado de la Fig. (a).

Considerando el equilibrio de la articulación $\underline{E}$, tomando a esta articulación como un cuerpo libre, vemos que actúan la fuerza de reacción $\underline{Re}$, conjuntamente con las reacciones $S_{\underline{1}}$ y $S_{\underline{2}}$, ejercidas por las barras $\underline{1}$ y $\underline{2}$. Al armar el triangulo de fuerzas y sabiendo que el mismo debe estar en equilibrio, se determina sentido y dirección de $S_{\underline{1}}$ y $S_{\underline{2}}$.

Para determinar si es con compresión o tracción vemos que el esfuerzo S_2 va hacia el nudo, dándome COMPRESIÓN, mientras que el esfuerzo S_1 se aleja del nudo, generándome TRACCIÓN.

De esta misma manera se debe determinar el equilibrio en los demás nudos donde encuentre dos incógnitas, procediendo a determinar intensidad, dirección y sentido de cada esfuerzo interno.

En forma ANALÍTICA, se puede aplicar a cada nudo del reticulado las dos ECUACIONES DE EQUILIBRIO.

$$\sum F_x = 0$$

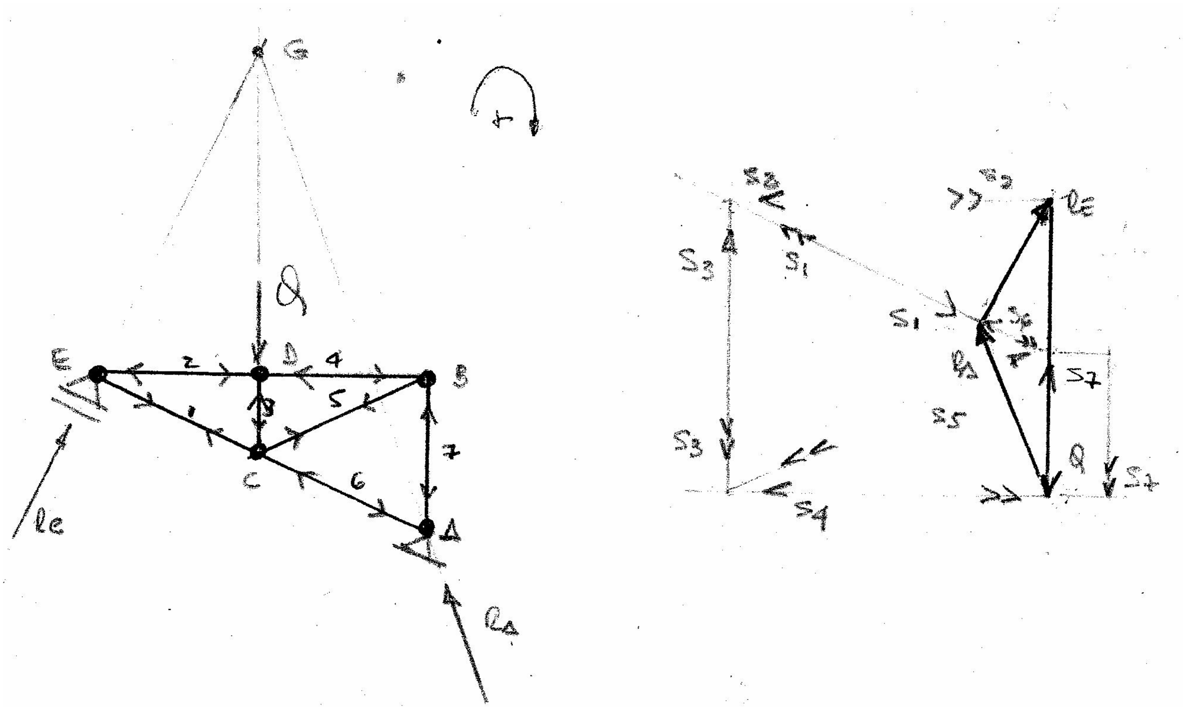
$$\sum F_y = 0$$

En lugar de construir los distintos polígono de fuerzas.

Esto nos dice que puede resolverse en forma gráfica o analítica.

Según resulte más fácil su determinación.

- <u>MÉTODO DE CREMONA GRÁFICO</u>



Aplicando el método de los nudos, se han determinado los esfuerzos en las barras de un reticulado dibujando los polígonos de fuerzas para las distintas articulaciones, notamos que el esfuerzo que corresponde a cada barra ha sido representado gráficamente DOS VECES, uno para cada una de las dos reacciones iguales, pero de sentido contrario, que la misma ejerce sobre las articulaciones de sus dos extremos.

Para cortar esta duplicación, los polígonos de fuerzas, en ciertas condiciones, pueden superponerse UNO SOBRE OTRO y CONSTRUIR UN DIAGRAMA COMPUESTO DENOMINADO <u>"DIAGRAMA DE MAXWELL – CREMONA"</u> para el reticulado.

Como ejemplo. Consideremos el reticulado del punto anterior, donde determinamos el triangulo básico de fuerzas Q: Ra y Re para toda la estructura considerada como un cuerpo libre, el triangulo de fuerzas para la articulación E puede unirse directamente en la forma indicada, en lugar de dibujar NUEVAMENTE el VECTOR R_E, como se hizo por el método de los nudos.

De la misma manera, cuando pasamos a considerar la articulación D, no es necesario dibujar de nuevo el vector S_2, sino solamente INVERTIR SU SENTIDO Y AGREGAR LOS VECTORES S_4 y S_3, directamente al diagrama existente.

Se observará que el vector Q, trazado previamente CAE PERFECTAMENTE EN LA POSICIÓN QUE LE CORRESPONDE, de manera que no hay necesidad de dibujarlo nuevamente.

Una vez más, cuando pasamos a considerar la articulación C, notamos que los vectores ya construidos S_1 y S_2 al invertirse su sentido, se encuentran en el orden en que deben hallarse para comenzar el trazado del polígono de fuerza correspondiente a esta articulación.

De esta manera, otro polígono de fuerzas se superpone, con buen resultado, al diagrama existente, sin que sea necesario duplicar vector alguno.

ESTA SUPERPOSICIÓN, SIN REPETICIÓN, SOLO SERÁ POSIBLE SI RECORREMOS CADA ARTICULACIÓN DEL RETICULADO EN LA MISMA DIRECCIÓN (ya sea en el mismo sentido de las agujas del reloj o en sentido contrario), y si tomamos las fuerzas que actúan en cada articulación en el orden en que las mismas aparecen.