TEORÍA

TEMA 6

CENTRO DE FUERZAS PARALELAS

A- Centro de fuerzas paralelas caso dos fuerzas- caso"n" fuerzas. Definición centro de fuerzas paralelas.

B- Caso de fuerzas paralelas de igual sentido (gráfico)

C- Caso de fuerzas no concurrentes (gráfico)
  - Determinación del centro de fuerzas en forma analítica, determinar XC y YC.

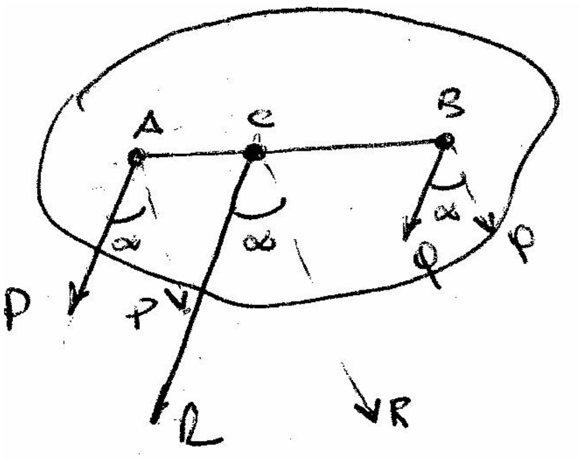
D- Centro de gravedad. Definición.

E- Determinación analítica de las coordenadas del centro de gravedad XO YO.

F- Caso de superficie que admite un eje de simetría
  - Ejemplo práctico de superficie.
  - Centro de gravedad de líneas. Concepto baricentro.
  - Ejemplo práctico de línea.

Tema 6

- CENTRO DE FUERZAS PARALELAS



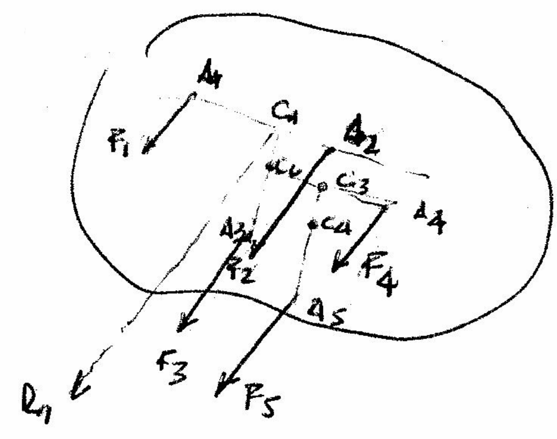
Sean $\overline{P}$ y $\overline{Q}$ dos fuerzas paralelas (figura), aplicadas a un cuerpo rígido en los puntos A y B su resultante R será, por lo tanto, paralela a las fuerzas dadas, igual a su suma algebraica y su recta de acción cortará a la recta AB en un punto C tal que:

$$M_C = 0 \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{P}{Q}$$ (Expresión ya demostrada)

Si las fuerzas P y Q giran alrededor de sus puntos de aplicación, cualquier ángulo $\propto$ en su plano de acción, la resultante R girará el mismo ángulo $\propto$ y su recta de acción pasará nuevamente por el punto C. De esta manera, vemos que el punto "C" es el único punto por el cual pasa la resultante de las fuerzas P y Q, aplicadas en los puntos A y B, cualquiera sea la dirección dada a estas fuerzas. Se denomina a este punto el CENTRO DE FUERZAS PARALELAS para el caso de dos fuerzas paralelas.

Consideremos ahora el caso de un sistema de fuerzas paralelas sean A_1 A_2 $A_3 \ldots$ A_u cualquier sistema de puntos dados en un cuerpo rígido, figura 1.

fig 1



Al cual se le aplican las fuerzas paralelas F_1 $F_2 \ldots F_u$. F_1 y F_2 son reemplazadas por su resultante R_1, aplicado en C_1 situado sobre la recta de acción A_1 A_2, de manera tal que se cumpla la relación $\boxed{\dfrac{A_1 C_1}{A_2 C_1} = \dfrac{F_2}{F_1}}$

De la misma manera, componiendo la resultante parcial R_1 aplicada en C_1, con la fuerza R_3 aplicada en A_3, llegamos a la conclusión de que el centro C_2 de las tres fuerzas paralelas F_1, F_2, F_3, aplicadas respectivamente en los puntos A, A_2 y A_3 cae sobre la recta C_1 A_3 en una posición tal que:

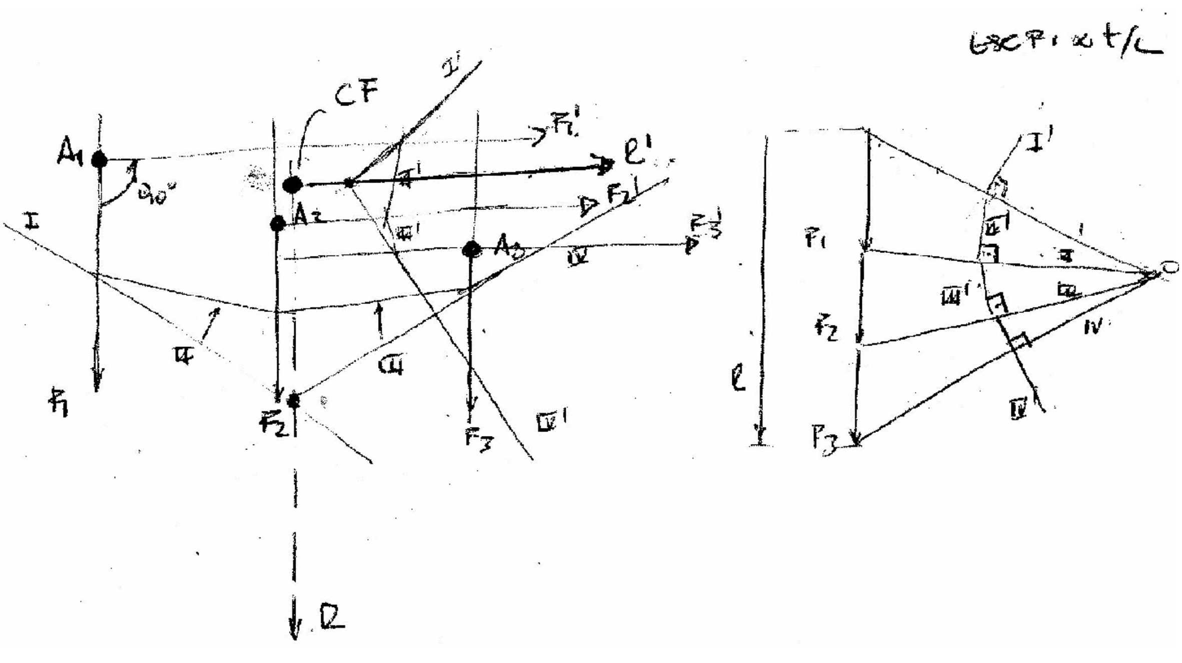
$$\boxed{\frac{C_1 C_2}{C_2 A_3} = \frac{F_3}{(F_1 + F_2)}}$$

Puede continuarse este procedimiento hasta que se haya encontrado el centro de "<u>n</u>" fuerzas paralelas aplicadas en los "<u>n</u>" puntos dados.

Vemos que hay UN PUNTO Y SÓLO UNO, POR EL CUAL PASA SIEMPRE LA RESULTANTE, CUALQUIERA SEA LA DIRECCIÓN SEGÚN LA CUAL ACTÚAN LAS FUERZAS PARALELAS. A ESTE PUNTO SE LO DENOMINA “CENTRO DE FUERZAS PARALELAS”, para el sistema dado de fuerzas, aplicado en el sistema de puntos dados.

A) <u>CASOS DE FUERZAS PARALELAS (GRÁFICO) DE IGUAL SENTIDO.</u>

En este caso conviene determinar R por el método del polígono funicular. El método general dice que debemos girar las fuerzas un mismo ángulo y en el mismo sentido con el que el sistema de fuerzas girada se convertiría en un nuevo sistema de fuerzas paralelas donde tendríamos que trazar una nueva figura POLAR y nuevo FUNICULAR para determinar la posición de la resultante de las FUERZAS GIRADAS. Esa nueva figura polar puede evitarse si:

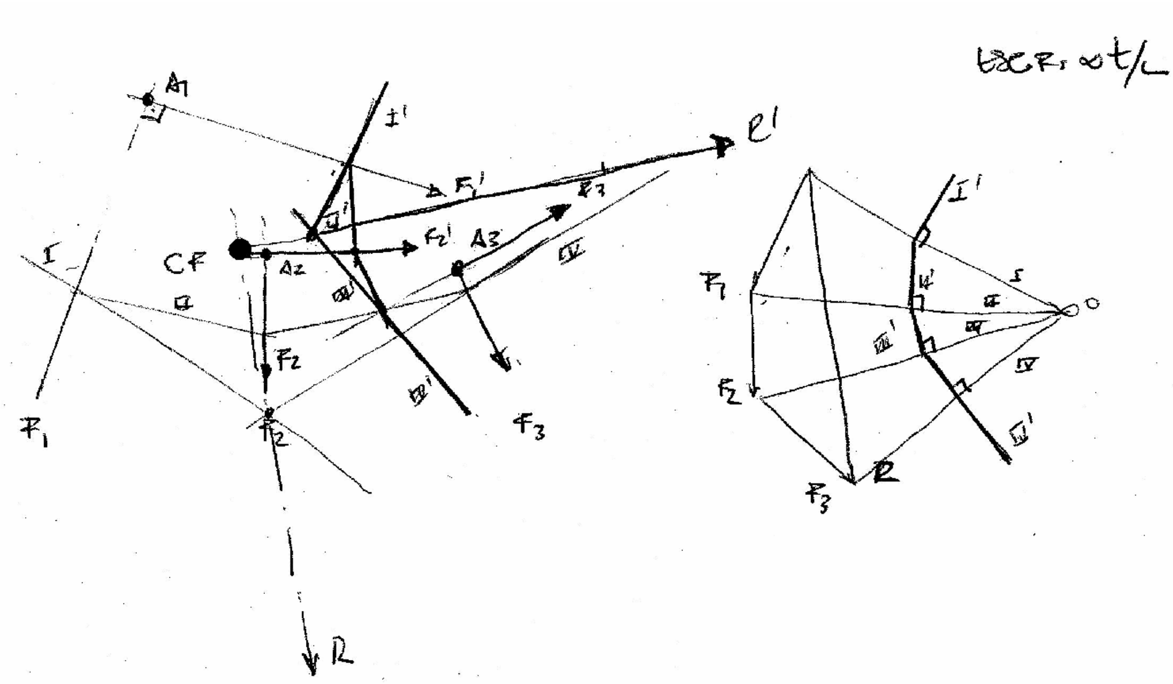


Se giran las fuerzas un ángulo igual a 90 grados ya que en este caso se demuestra que los nuevos rayos polares son PERPENDICULARES A LAS ANTERIORES por lo que podemos obtener su dirección trazando las normales a los rayos de la PRIMERA FIGURA POLAR. La intersección de R y R’ me determinan el CENTRO DE FUERZAS DE MI SISTEMA DE FUERZAS.

B) <u>SISTEMA DE FUERZAS NO CONCURRENTES</u>

La misma simplificación puede ser empleada en el caso de un sistema de fuerzas no concurrentes.

La figura es suficientemente ilustrativa.



Ya estamos en condiciones de determinar en forma gráfica los centros de cualquiera sea el sistema.

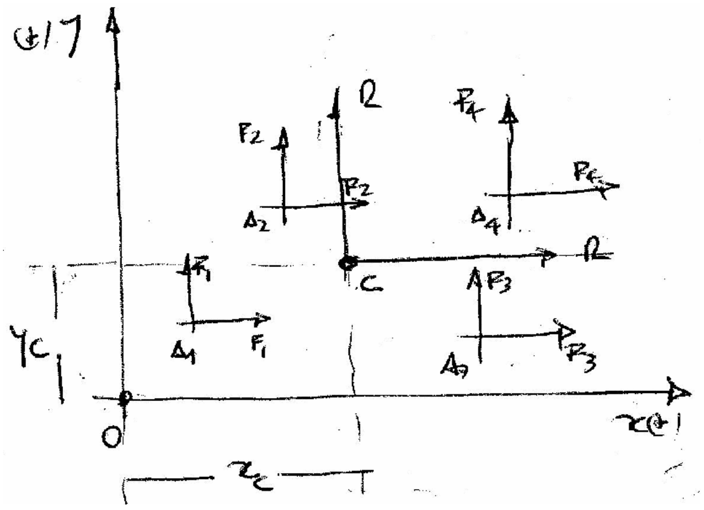
- <u>DETERMINACIÓN DEL CENTRO DE FUERZAS EN FORMA ANALÍTICA</u>

Teniendo un sistema de puntos, pertenecientes todos al mismo plano de un cuerpo rígido, podemos ubicar el CENTRO DE FUERZAS PARALELAS PARA UN SISTEMA DE FUERZAS APLICADAS EN ESTOS PUNTOS, UTILIZANDO LAS SIGUIENTES ECUACIONES:

$$\boxed{y = \sum_{i=1}^{n} y_i}$$

$$\boxed{x = \frac{\sum_{i=1}^{n} (F_i x_i)}{\sum_{i=1}^{n} y_i}}$$

Sean A_1 A_2 $A_{3\ldots}$ A_u (Fig.) cualquier sistema de puntos pertenecientes al mismo plano de un cuerpo rígido y sean X_1 X_2 $X_{3\ldots}$ X_u e Y_1 Y_2 $Y_{3\ldots}$ Y_u las coordinadas de estos puntos con referencia a los ejes ortogonales x e y, tomados en el plano de los puntos. Para hallar el CENTRO C de las



fuerzas paralelas, para un sistema de fuerzas F_1 F_2 $F_{3\ldots}$ F_u aplicadas a esos puntos y actuando en cualquier dirección, imaginemos, en primer lugar, que las fuerzas actúan PARALELAMENTE AL EJE DE LAS Y. En ese caso, tenemos un sistema de fuerzas en un plano y el brazo X_C de su resultante puede hallarse de la siguiente manera:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{u} (F_i x_i)}{\sum_{i=1}^{u} F_i} = (R) \qquad \text{(A)}$$

Hagamos girar todas las fuerzas en el plano de la figura hasta actuar PARALELAMENTE AL EJE DE LAS X, en este caso el brazo Y_C puede hallarse de la siguiente manera:

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^{u} (F_i y_i)}{\sum_{i=1}^{u} F_i} (R) \qquad \text{(B)}$$

Ya hemos visto que el centro de fuerzas paralelas, de cualquier número de fuerzas aplicadas a un sistema de puntos dados, es INDEPENDIENTE DE LA DIRECCIÓN SEGÚN LA CUAL ACTÚAN LAS FUERZAS.

Se concluye que los BRAZOS DE MOMENTOS X_C e Y_C representan LAS COORDENADAS DEL CENTRO C de fuerzas PARALELAS.
Todas las fuerzas Fi debe ser consideradas como POSITIVAS O NEGATIVAS, SEGÚN ACTÚEN EN LA DIRECCIÓN POSITIVA O NEGATIVA DEL EJE AL CUAL SEA PARALELA.

De las expresiones A y B se deduce de que el CENTRO DE FUERZAS PARALELAS, PARA CUALQUIER SISTEMA DADO DE FUERZAS, APLICADAS A UN SISTEMA DE PUNTOS DADO EN UN PLANO, DEPENDE SOLO DE LAS “POSICIONES DE LOS PUNTOS” Y DE LAS “MAGNITUDES RELATIVAS DE LAS FUERZAS”.

Se deduce además que si las magnitudes de las fuerzas son TODAS IGUALES, X_C e Y_C del centro de fuerzas paralelas, dadas, pasan a ser simplemente LAS MEDIAS DE LAS CORRESPONDIENTES COORDENADAS DE LOS PUNTOS DE APLICACIÓN DADOS.

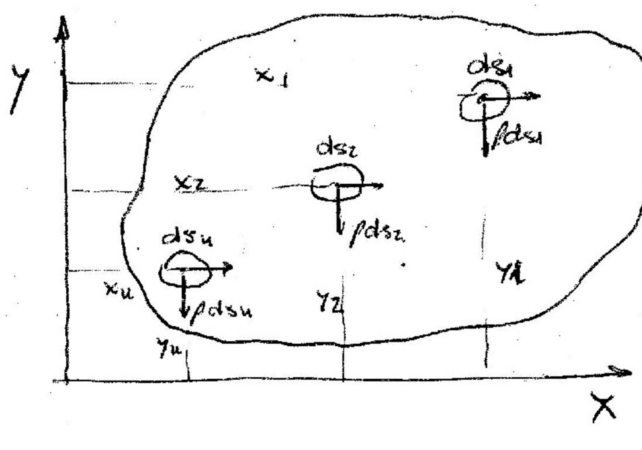
- <u>CENTRO DE GRAVEDAD</u>

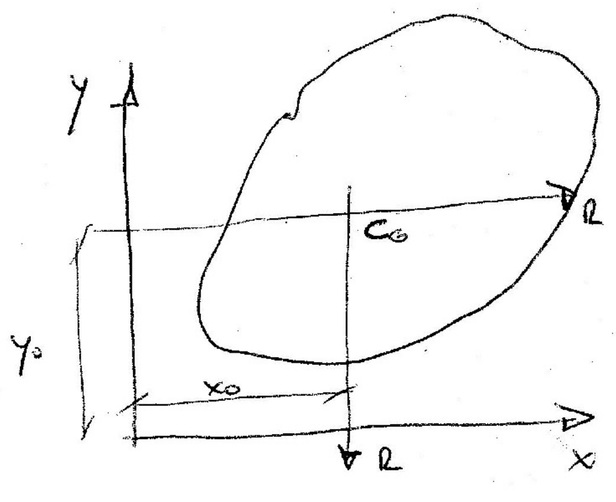
Hasta aquí, nada se dijo de la naturaleza de las fuerzas que también pueden ser cualquiera, pero en el caso de que estas fuerzas SEAN GRAVITATORIAS, el CENTRO DE FUERZAS RECIBE EL NOMBRE DE "<u>CENTRO DE GRAVEDAD</u>".

Todos los métodos gráficos estudiados para determinar el CENTRO DE FUERZAS SON VALIDOS PARA DETERMINAR EL CENTRO DE GRAVEDAD.

- <u>DETERMINACIÓN ANALÍTICA DE LAS COORDENADAS DEL CENTRO DE GRAVEDAD</u>

Supongamos que queremos determinar el centro de gravedad de una SUPERFICIE MATERIAL PLANA, que suponemos de ESPESOR CONSTANTE E INFINITAMENTE PEQUEÑO, HOMOGÉNEO, cuyo peso por unidad de superficie sea p [$9/cm^2$] y que referimos a un par de ejes x e y.-





Si consideramos dividido, la superficie en un gran número de superficies más pequeñas, el peso de cada uno de esos elementos de superficie también pequeño será:

$$\boxed{P_i = \rho\, ds_i} \quad (\text{PESO})$$

Si tomamos momentos estáticos de todas esas fuerzas con respecto al eje "y" y aplicamos Varignon, obtenemos:

$$\circledast \quad \rho\, ds_1 \times x_1 + \rho\, ds_2 \times x_2 + \ldots + \rho\, ds_n \times x_n =$$

$$= \underbrace{(\rho\, ds_1 + \rho\, ds_2 + \ldots + \rho\, ds_n)}_{R} \times x_0$$

ρ (FACTOR COMÚN)

$$\sum_{i=1}^{n} ds_i\, x_i = S \times x_0$$

S = Superficie

$$\therefore \quad \boxed{x_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} ds_i\, x_i}{S}}$$

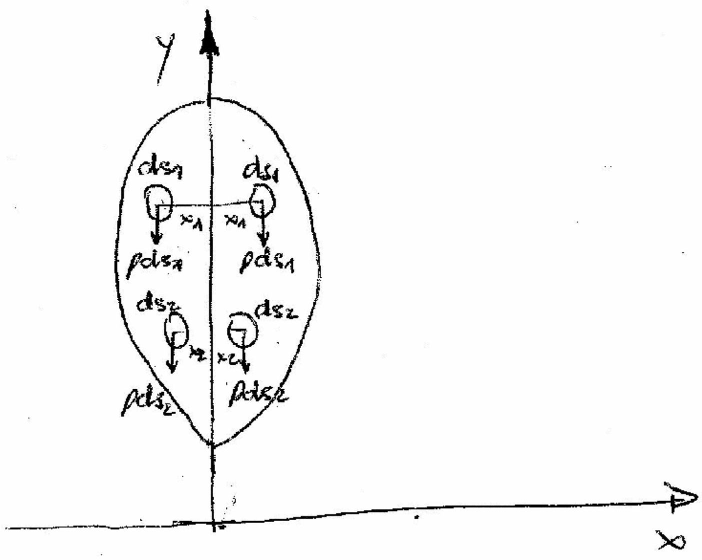
Si ahora giramos las fuerzas 90º y planteamos la misma ecuación de momentos pero que será respecto al eje x obtendremos la otra coordenada del CENTRO DE GRAVEDAD, lo que por analogía estará dada por la expresión:

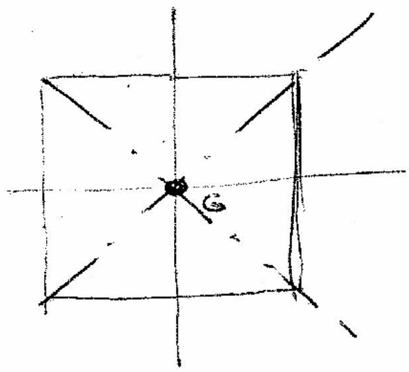
$$\boxed{y_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} ds_i\, y_i}{S}}$$

Supongamos ahora que queremos determinar las COORDENADAS DEL CENTROTE GRAVEDAD DE UNA SUPERFICIE PLANA que admite un EJE DE SIMETRÍA.

Hacemos las mismas suposiciones que en el caso anterior y referimos la figura a un par de ejes coordenados, una de as cuales coincide con el eje de simetría.

Por condición de simetría a cada elemento de superficie situado a un lado del eje de simetría le corresponderá otro exactamente igual, ubicado del otro lado del eje de simetría.





Si tomamos momentos estáticos de todas las fuerzas con respecto del eje “y” nos queda:

$$\rho\Big[\underbrace{(ds_1 x_1 - ds_1 x_1)}_{0} + \underbrace{(ds_2 x_2 - ds_2 x_2)}_{0} + \dots + \underbrace{(ds_u x_u - ds_u x_u)}_{0}\Big] =$$

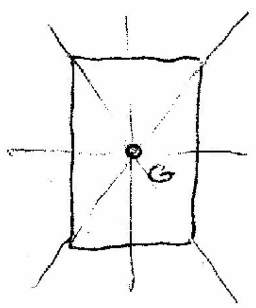
$$2\rho\,(ds_1 + \dots ds_u)\, x_0 \qquad (2\,ds)$$

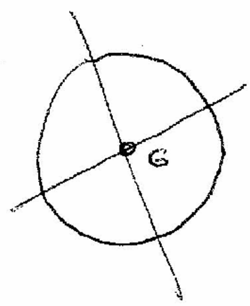
$$\Rightarrow \quad 0 = 2\gamma S_x\, x_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_0 = 0}$$

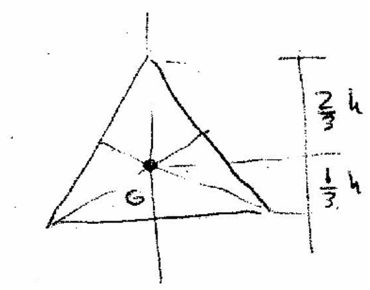
Esta solución nos dice que una superficie que admita un eje de simetría tiene su centro de gravedad sobre dicho eje de simetría.

Por extensión del razonamiento si la superficie admite dos ejes de simetría el centro de gravedad deberá pertenecer a ambas, lo que significa que se encuentra en la intersección de los dos ejes de simetría.

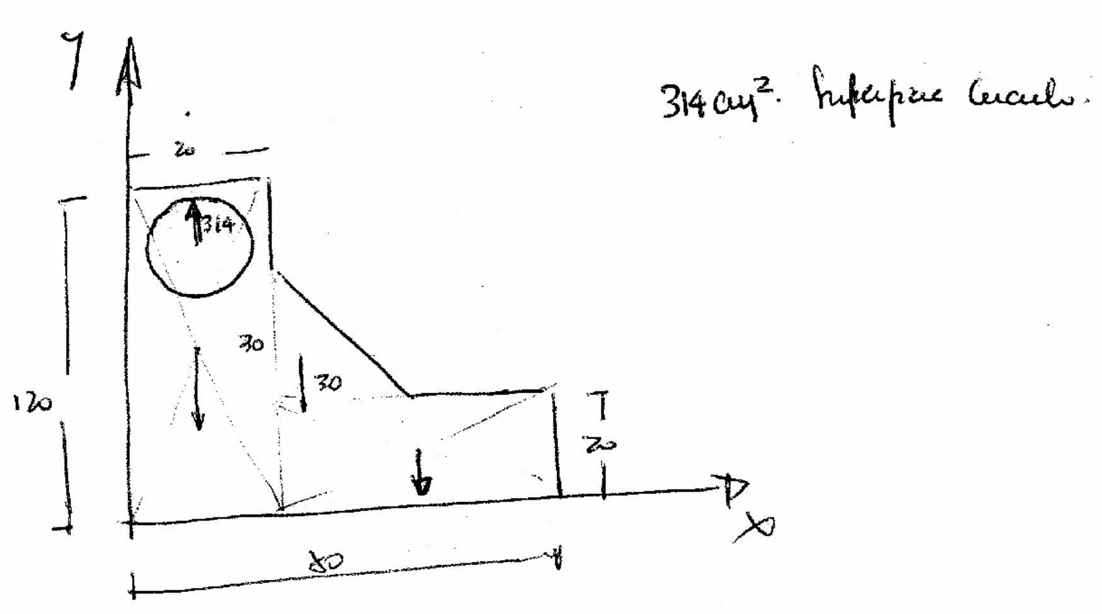
Esta conclusión nos permite ubicar en “<u>forma rápida la posición del centro de gravedad</u>” en todas aquellas superficies cuyas formas se corresponden con superficies geométricas simples y muchas de las secciones de los materiales que se usan en la práctica responden a esta forma de superficie.







Ejemplo:



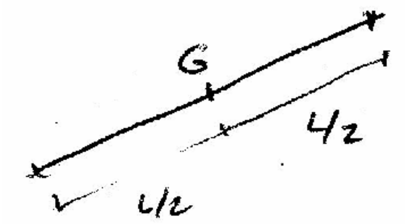
Tomamos momentos respecto del eje "y"

$$x_0 = \frac{2400 \times 10 + 450 \times 30 + 1200 \times 50 - 314 \times 10}{3736} =$$

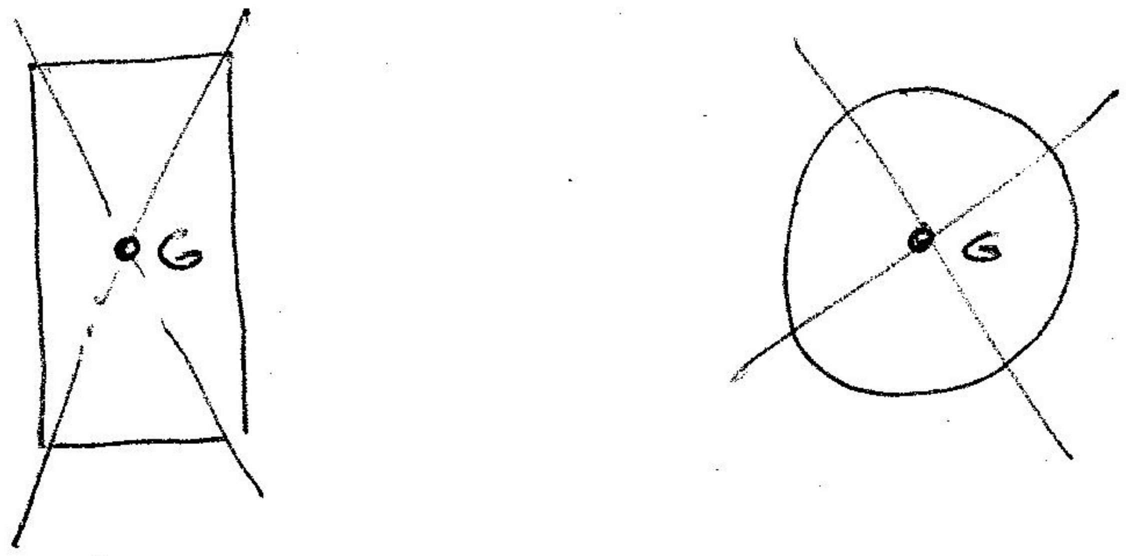
Si giramos todas las fuerzas 90º y tomamos momentos con respecto al eje "x"

$$y_0 = \frac{2400 \times 60 + 450 \times 30 + 1200 \times 10 - 314 \times 110}{3760} =$$

- Muchas veces debemos determinar LOS CENTROS DE GRAVEDAD DE LÍNEAS, el caso más sencillo es el de la LÍNEA RECTA donde evidentemente el centro de GRAVEDAD SE ENCUENTRA EN EL PUNTO MEDIO.

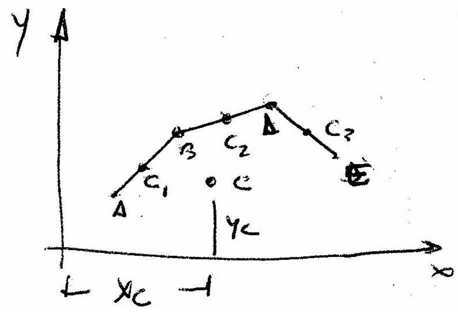


Si la línea forma una circunferencia, un rectángulo o un cuadrado, el centro de gravedad coincide con el centro de GRAVEDAD DE LA SUPERFICIE que responde a esas formas.-



Cabe aclarar que las figuras y curvas geométricas, no poseen la propiedad de tener PESO, el término CENTRO DE GRAVEDAD resulta poco apropiado y por esta razón, se lo reemplaza a menudo por el término BARICENTRO.

Ahora bien, si la línea no CIERRA, forma una poligonal, colocamos en el centro de gravedad o baricentro a cada tramo FUERZAS PROPORCIONALES A LAS LONGITUDES DE CADA UNA Y LAS COMPONEMOS POR MEDIOS ANALÍTICAMENTE.



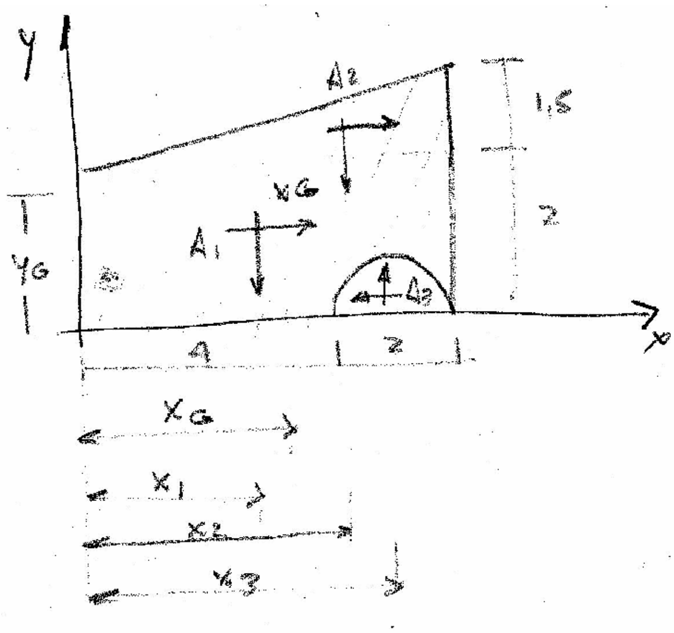
Consideremos por ejemplo, la línea quebrada ABDE, compuesta por los segmentos de tres líneas rectas AB, BD, DE, de longitudes L_1; L_2; L_3 y baricentros C_1; C_2; C_3 respectivamente.

Indicando con X_1; Y_1; X_2 Y_2; y X_3 Y_3 las coordenadas de los baricentros conocidos C_1; C_2 y C_3 respectivamente podemos obtener:

$$x_c = \frac{L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3}{L_1 + L_2 + L_3}$$

$$y_c = \frac{L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3}{L_1 + L_2 + L_3}$$

Ejemplo: Hallar las coordenadas del baricentro del área de la figura rayada. Verificar gráficamente.



$\frac{\pi \times d^2}{4} : 2$

i	Ai	xi	Ai xi	yi	Ai yi
1	12	3	36	1	12
2	4,5	4	18	2,5	11,25
3	-1,57	5	-7,85	0,41	-0,64
Σ	14,93		46,15		22,61

$A_1 = b \times h = 6 \times 2 = 12\ cm^2 \qquad x_1 = \frac{b}{2} = 3cm \qquad y_1 = \frac{h}{2} = 1cm$

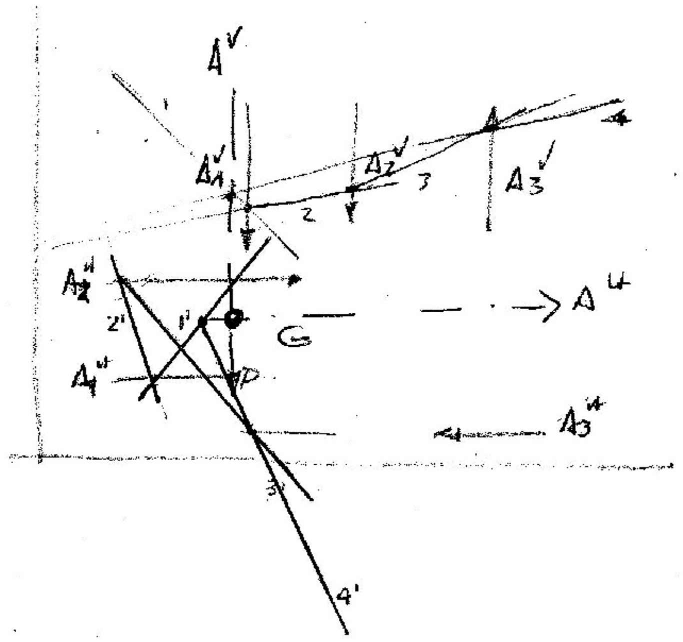
$A_2 = \frac{b \times h}{2} = \frac{6 \times 1,5}{2} = 4,5\ cm^2 \qquad x_2 = \frac{2}{3} b = 4cm \qquad y_2 = 2 + \frac{h}{3} = 2,5cm$

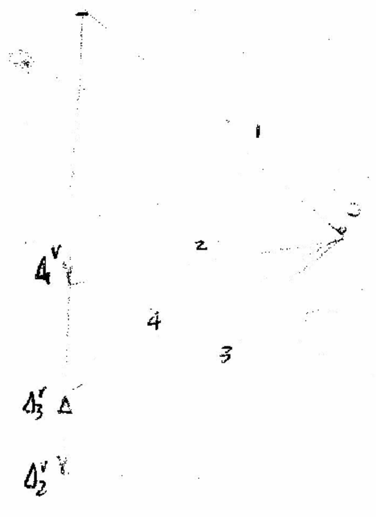
$A_3 = -\frac{\pi \times r^2}{2} = -\frac{\pi \times 1^2}{2} = -1,57cm^2 \qquad x_3 = 4 + r = 5cm \qquad y_3 = \frac{4r}{3\pi} = 0,42cm$

$$\boxed{x_G = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{46,15}{14,93} = 3,09cm}$$

$$y_G = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{22,61}{14,93} = \boxed{1,51\ cm}$$

Verificación gráfica





Eje ...

$$\boxed{\begin{aligned} x_G &= 3,1cm \\ y_G &= 1,50cm \end{aligned}}$$

H = Horizontal

V = Vertical