TEORÍA

TEMA 10

MOMENTO DE INERCIA

1. CONCEPTO DE MOMENTO DE INERCIA AXIALES O AXILES Y POLAR – UNIDADES:
   - Por que es > que cero
   - Como se puede determinar Ip (directa e indirecta)
   - Por que se llama momento de Inercia de 2º orden.

2. MOMENTO DE INERCIA DE ALGUNAS FIGURAS GEOMÉTRICAS SIMPLES

   2.1. Rectángulo

   (I_{BB} y I_{AA} e I_P;)

   2.2. Ejemplo numérico (definición de ejes principales de inercia)

   (Momento de inercia polar. Momento de inercia baricentrico I_{NG} y I_{YG})

   2.3. Cuadrado: I_{AA}; I_{BB}; I_{XG}; I_{YG}; I_G

   2.4. Triángulo (con respecto a un eje que pasa por el vértice y base)

   2.5. Círculo: (con respecto del baricentro G)

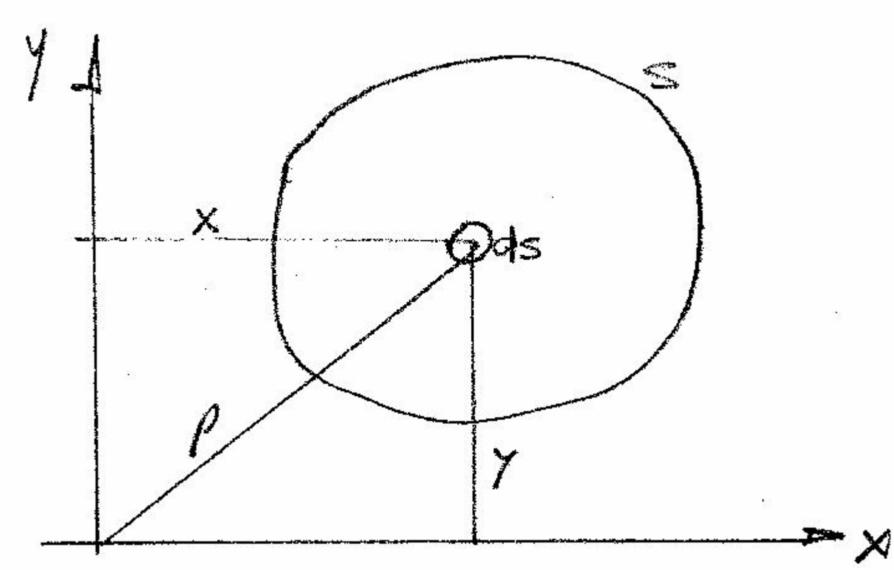
3. Teorema de Steiner – Aplicación del teorema

4. Ejemplo de Aplicación de cálculo de Momento de inercia.

5. Radio de giro.

Tema 10

MOMENTO DE INERCIA



Supongamos una superficie plana de forma cualquiera que referimos a un par de ejes también cualesquiera x e y.

Supongamos dividido la superficie en infinito "ds" superficies, infinitamente pequeñas cada una de ellas. Si llamamos x e y a las distancias de una cualquiera de ellas a los ejes coordenados "definimos" como MOMENTO DE INERCIA DE LA SUPERFICIE PLANA CON RESPECTO A LOS EJES x e y A LAS EXPRESIONES.

$$\boxed{I_{xx} = \int y^2 ds}$$

$$\boxed{I_{yy} = \int x^2 ds}$$

Los momentos de inercia respecto de ejes reciben el nombre de AXIALES O AXILES, mientras que los momentos de inercia respecto de un punto recibe el nombre de POLAR.

Por ejemplo, si tomamos un punto cualquiera, como puede ser la intersección de los ejes x e y, el momento de inercia de la superficie respecto de dicho punto está dado por la expresión:

$$\boxed{I_p = \int \rho^2 \times ds}$$

- Las unidades del momento de inercia más utilizados es cm 4.

- Los momentos de inercia POLARES y AXIALES de cualquier superficie con respecto a cualquier eje o punto son siempre mayores a cero.

No existe momento de inercia menor o igual a cero.

Ello se debe a que <u>por definición</u> los momentos de inercia están dados por una sumatoria de productos que son siempre mayores a cero, ya que las superficies son positivas y las distancias, que sí pueden ser negativas, por estar elevadas al cuadrado son también positivas.

Por Pitágoras $\boxed{p^2 = x^2 + y^2}$ y si reemplazamos en el momento de inercia POLAR

$$\rightarrow \quad I_p = \int \rho^2 \, ds = \int (x^2 + y^2)\, ds$$

$$= \int x^2 ds + \int y^2 ds$$

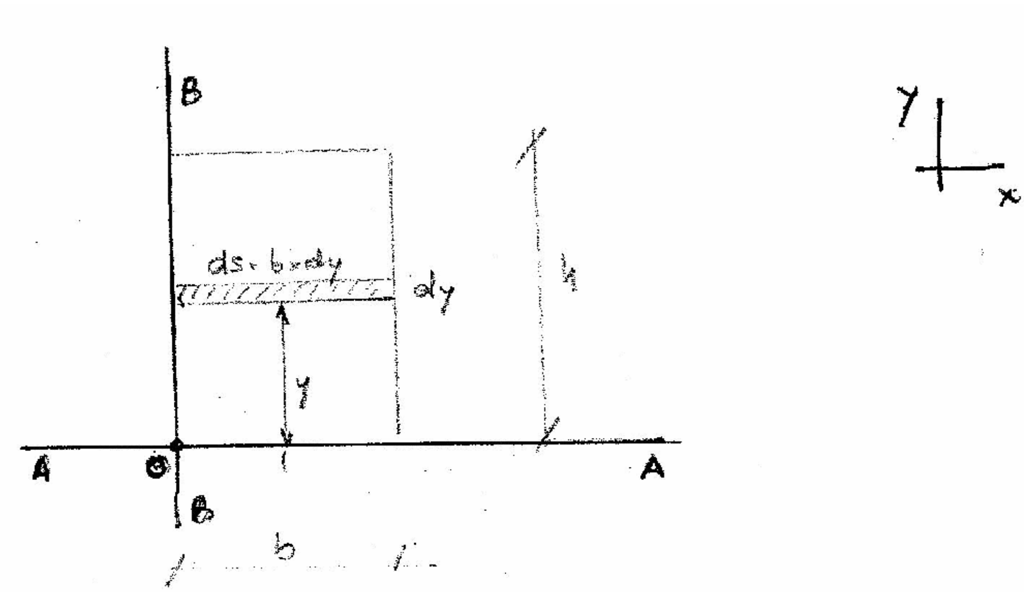
$$\boxed{I_p = I_{yy} + I_{xx}}$$

La conclusión es que el momento de inercia POLAR o lo que es lo mismo, el momento de inercia con respecto a cualquier punto puede ser hallado en forma directa por la expresión con que definíamos el MOMENTO DE INERCIA POLAR o en forma indirecta trazando por el punto a dos ejes cualesquiera, perpendiculares entre si y hallando los momentos de Inercia con respecto a estos ejes y sumándolos.

Los momentos de inercia reciben el nombre de MOMENTOS DE SEGUNDO ORDEN, para diferenciarlos de los momentos estáticos a los que también se llaman MOMENTOS DE 1º ORDEN.

- MOMENTOS DE INERCIA DE ALGUNAS FIGURAS GEOMÉTRICAS SIMPLES

A. RECTÁNGULO



-Momento de inercia con respecto al eje AA colineal con la base del rectángulo:

$$I_{AA} = \int_0^h y^2\, ds = \int_0^h y^2\, b \times dy = b \int_0^h y^2\, dy$$

$$I_{AA} = \frac{b}{3}\left[y^3\right]_0^h = \frac{b \times h^3}{3} \Rightarrow \boxed{I_{AA} = \frac{b \times h^3}{3}}$$

- Ahora con respecto al eje B – B:

$$I_{BB} = \int_0^b x^2\, ds = \int_0^b x^2\, h \times dx = h \int_0^b x^2\, dx = \frac{h}{3}\left[x^3\right]_0^b$$

$$\boxed{I_{BB} = \frac{h \times b^3}{3}}$$

De esta manera, ya nos encontramos en condiciones de hallar el MOMENTO DE INERCIA POLAR con respecto al punto de intersección de los ejes, el que valdrá:

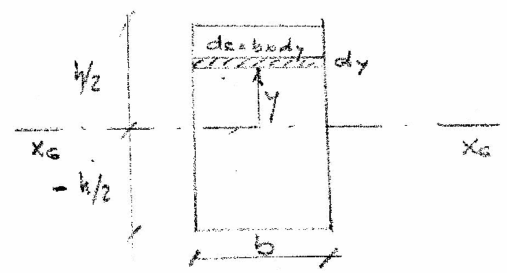
$$I_p = I_{AA} + I_{BB}$$

$$= \frac{b\times h^3}{3} + \frac{h\times b^3}{3}$$

$$I_p = \frac{1}{3}\left(b\times h^3 + h\times b^3\right) = \frac{b\times h}{3}\left(h^2+b^2\right)$$

$$\boxed{I_p = \frac{b\times h}{3}\left(h^2+b^2\right)}$$

- Vamos a determinar el momento de inercia del rectángulo con respecto de un eje baricentrico.



$$I_{x_G} = \int_{-h/2}^{h/2} y^2\, ds = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b\times dy = b\int_{-h/2}^{h/2} y^2\, dy = \frac{b}{3}\left[y^3\right]_{-h/2}^{h/2}$$

$$= \frac{b}{3}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^3 - \left(-\frac{h}{2}\right)^3\right] = \frac{b}{3}\left[\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8}\right] = \frac{b}{3}\times 2\frac{h^3}{8} = \frac{b\times h^3}{12}$$

$$\boxed{I_{x_G} = \frac{b\times h^3}{12}}$$

Análogamente con respecto al eje Y, tenemos:

$$\boxed{I_{YG} = \frac{h \times b^3}{12}}$$

- El momento de inercia polar respecto al baricentro es

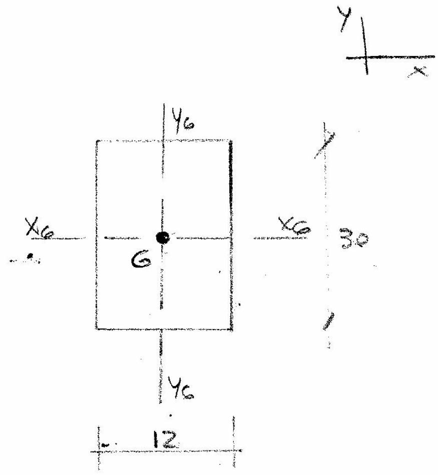
$$\boxed{I_G = \frac{b \times h}{12}\left(h^2 + b^2\right)}$$

Ejemplo numérico:

$$I_{xG} = \frac{b \times h^3}{12} = \frac{12 \times 30^3}{12} = 27.000 \text{ cm}^4$$

$$I_{YG} = \frac{h \times b^3}{12} = \frac{30 \times 12^3}{12} = 4320 \text{ cm}^4$$

$$I_G = 27000 + 4320 = 31.320 \text{ cm}^4$$



Cualquiera sea el par de ejes baricentricos, el MOMENTO DE INERCIA POLAR DE ESE RECTÁNGULO CON RESPECTO A G valdrá siempre 31.320 cm^4.

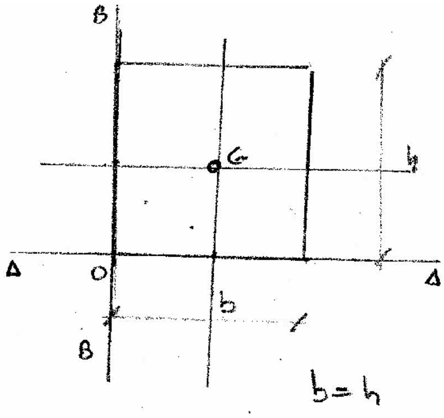
Si giramos los ejes haciéndolos ocupar distintas posiciones, la suma de sus momentos de inercia siempre deberá ser = 31.320 cm^4.

Se demuestra que no habrá ningún eje cuyo momento de Inercia sea mayor a 27.000 cm4 , y ningún eje perpendicular al anterior cuyo momento de inercia sea inferior a 4320 cm^4.

Por ejes BARICENTRICOS para los cuales se verifica LOS MAYORES Y MENORES VALORES DE LOS MOMENTOS DE INERCIA RECIBEN el nombre de EJES PRINCIPALES DE INERCIA.

- Ahora bien, si la sección en vez de ser rectangular es cuadrada, los momentos de inercia son:

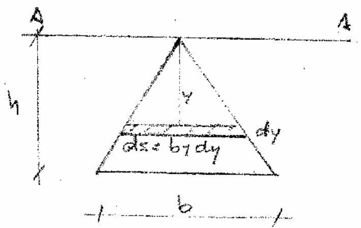
$$\left.\begin{aligned} I_{\Delta\Delta} &= \frac{b^4}{3} \\ I_{BB} &= \frac{b^4}{3} \end{aligned}\right\} \boxed{I_p = \frac{2}{3} b^4}$$



$$\left.I_{xG} = I_{yG} = \frac{b^4}{12}\right\} \boxed{I_G = \frac{b^4}{6}}$$

b) TRIANGULO (Con respecto a un eje que pasa por el vértice)

$$I_{\Delta\Delta} = \int_0^h y^2 ds = \int_0^h y^2 b_y dy$$

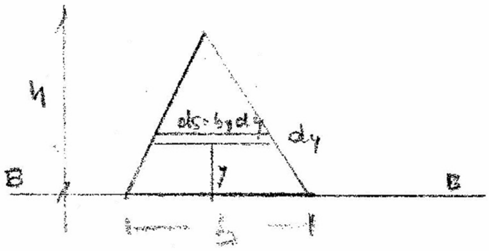


pero: $\frac{b}{h} = \frac{b_y}{y} \rightarrow \boxed{b_y = \frac{b}{h} y}$

$$I_{\Delta\Delta} = \int_0^h y^2 y \frac{b}{h} dy = \frac{b}{h} \int_0^h y^3 dy = \frac{b}{4h} \left[y^4\right]_0^h$$

$$I_{\Delta\Delta} = \frac{b}{4\cancel{h}} \times h^{\cancel{4}3} = \frac{b \times h^3}{4} \Rightarrow \boxed{I_{\Delta\Delta} = \frac{b \times h^3}{4}}$$

Ahora si determinamos con respecto a un eje que pasa en la base



$$I_{BB} = \int_0^h y^2\,ds = \int_0^h y^2\,b_y\,dy$$

pero: $\dfrac{b}{h} = \dfrac{b_y}{h-y}$

$$\boxed{b_y = (h-y) \times \frac{b}{h}}$$

$$I_{BB} = \int_0^h y^2\left(h \times \frac{b}{h} - y\frac{b}{h}\right)dy = \int_0^h y^2\,b \times dy - \int_0^h y^3\frac{b}{h}\,dy$$

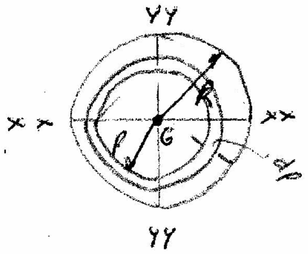
$$= \frac{b}{3}\Big[y^3\Big]_0^h - \frac{b}{h}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^h = \frac{b \times h^3}{3} - \frac{b}{4\cancel{h}}\,h^{\cancel{4}\,3}$$

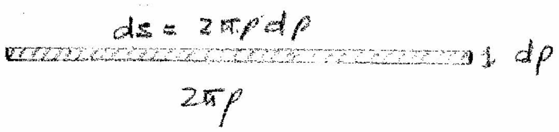
$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \times b \times h^3 = \frac{b \times h^3}{12}$$

$$\boxed{I_{BB} = \frac{b \times h^3}{12}}$$

c) CÍRCULO (Con respecto del baricentro G)

POLAR





(Polar) $I_G = \int_0^R \rho^2\, ds = \int_0^R \rho^2\, 2\pi\rho\, d\rho = \int_0^R 2\pi\rho^3\, d\rho = \frac{2\pi}{4}\Big[\rho^4\Big]_0^R$

$$\boxed{I_G = \frac{\pi \times R^4}{2}}$$

Pero $D = 2R \Rightarrow R = \frac{D}{2} \Rightarrow R^4 = \frac{D^4}{2^4}$

$I_G = \frac{\pi \times D^4}{2 \times 2^4} = \frac{\pi D^4}{32} \Rightarrow \boxed{I_G = \frac{\pi \times D^4}{32}}$

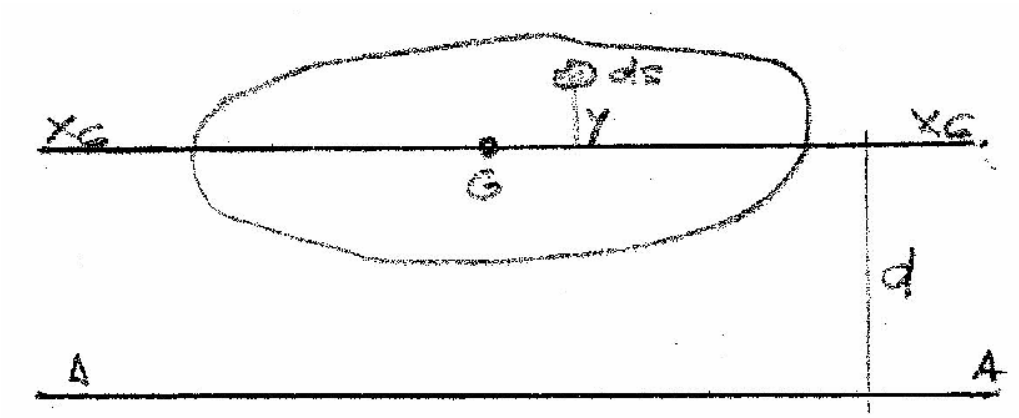
Debido a la simetría del círculo $I_{xx} = I_{yy}$; y con

$I_G = I_{xx} + I_{yy} \Rightarrow I_{xx} = I_G/2$

$I_{yy} = I_G/2$

$$\boxed{I_{xx} = I_{yy} = \frac{\pi \times D^4}{64}}$$

- TEOREMA DE STEINER



Supongamos tener una superficie de forma cualquiera, un eje baricentrico cualquiera y otro eje también cualquiera. Pero que sea paralelo al baricentrico que estamos considerando.

Sea “d” la distancia entre ambos ejes, si consideramos una superficie infinitamente pequeña ubicada a una distancia “y” del eje baricentrico, por definición d MOMENTO DE INERCIA de dicha superficie con respecto al eje A valdrá:

$$\boxed{I_{AA} = \int (y+d)^2 \times ds}$$

Desarrollando la expresión nos
queda:

$$I_{AA} = \int (y+d)^2 ds = \int y^2 ds + 2d \int y ds + d^2 \int ds$$

$$I_{AA} = I_{xG} + 0 + d^2 \times S$$

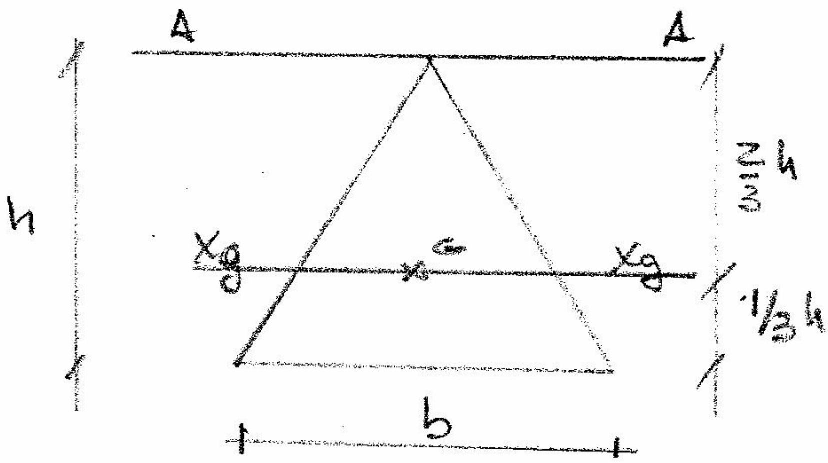
El segundo término del segundo miembro es el doble producto de la distancia entre los eje por el momento estático de la superficie con respecto a un EJE BARICENTRICO y este producto vale cero.

Por lo tanto todo el término se anula y el tercer término es el producto de la superficie total de la figura por la distancia al cuadrado de los ejes. Podemos enunciar entonces.

<u>TEOREMA DE STEINER</u>: “El momento de inercia de una superficie cualquiera con respecto de un eje A cualquiera, es igual al momento de inercia de dicha figura con respecto de un eje baricentrico paralelo al anterior más el producto de la superficie de la figura por la distancia al cuadrado entre los ejes:

$$\boxed{I_{AA} = I_{GG} + S \times d^2}$$

Aplicación del Teorema de Steiner:



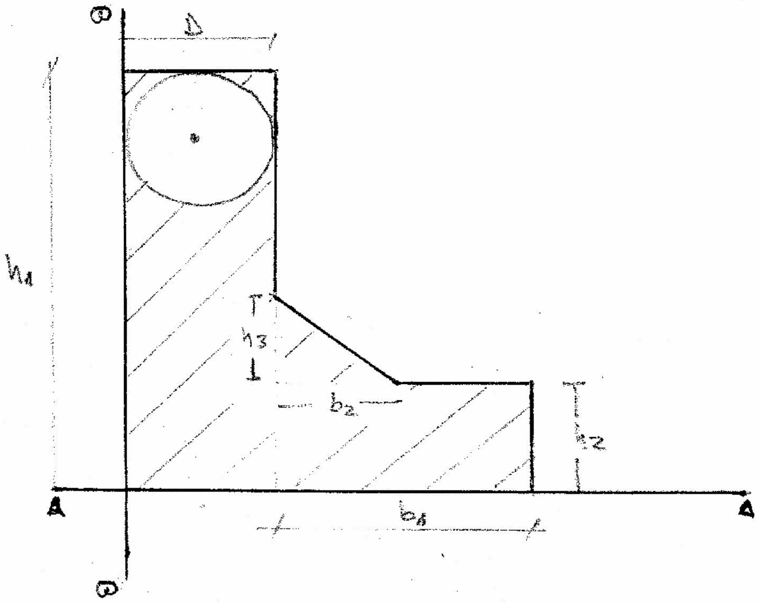
Vamos a hallar el momento de inercia de un triángulo con respecto de un eje baricentrico paralelo a la base utilizándolo a Steiner.

$$I_{xg} = I_{AA} - d^2 S = \frac{b \times h^3}{4} - \overbrace{\left(\frac{2}{3}h\right)^2}^{d^2} \times \overbrace{\frac{b \times h}{2}}^{S} = \frac{b \times h^3}{4} - \frac{2}{9} b \times h^3$$

$$= \frac{(9-8)}{36} b \times h^3 =$$

$$\boxed{I_{xg} = \frac{b \times h^3}{36}}$$

Ejemplo de aplicación de cálculo de Momento de Inercia:



$$I_{AA} = (+)\,\frac{D \times h_1^3}{3} = \left(\frac{D \times h_1^3}{12} + D \times h_1 \times \left(\frac{h_1}{2}\right)^2 \right)$$

$$(+)\,\frac{b_1 \times h_2^3}{3} = \left(\frac{b_1 \times h_2^3}{12} + b_1 \times h_2 \times \left(\frac{h_2}{2}\right)^2 \right)$$

$$(+)\left[\frac{b_2\, h_3^3}{36} + \left(\frac{b_2 \times h_3}{2} \right)\left(\frac{h_3}{3} + h_2 \right)^2 \right]$$

$$(-)\left[\frac{\pi D^4}{64} + \frac{\pi D^2}{4} \left(h_1 - \frac{D}{2} \right)^2 \right]$$

$$I_{BB} = \frac{h_1 D^3}{3} + \left[\frac{h_2 \times b_1^3}{12} + b_1\, h_2 \left(\frac{b_1}{2} + D \right)^2 \right] + \left[\frac{h_3 \times b_2^3}{36} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{b_2 \times h_3}{2} \right) \left(\frac{1}{3} b_2 + D \right)^2 \right] - \left[\frac{\pi D^4}{64} + \frac{\pi \times D^2}{4} \left(\frac{D}{2} \right)^2 \right] =$$

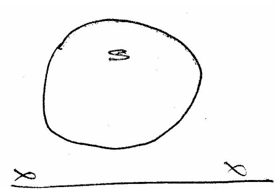
$$\boxed{I_P = I_{AA} + I_{BB}}$$

- <u>RADIO DE GIRO</u>

  Supongamos una superficie plana cualquiera y un eje también cualquiera.

Supongamos que conocemos el momento de inercia de la superficie con respecto del eje “<u>x</u>” también el valor de dicha superficie.-

Si hacemos el cociente entre ambas magnitudes obtendremos como resultado otra magnitud que tendrá por unidad, unidades de distancia al cuadrado.



$$\left[\frac{I_{xx}}{S}\right] = \left[\frac{cm^4}{cm^2}\right] = \left[cm^2\right]$$

Supongamos que esa unidad corresponde a una magnitud distancia a la que llamaremos RADIO DE GIRO, y lo designaremos con la letra i

$$\boxed{\frac{I_{xx}}{S} = i_{xx}^2}$$

Esto significa que el momento de inercia de la superficie con respecto del eje x también podría ser hallado multiplicando la superficie de la sección por el cuadrado del radio de giro.

$$\boxed{I_{xx} = S \times i_{xx}^2}$$

Comparando esta expresión con la primitiva definición del momento de inercia, el radio de giro vendría a ser como la distancia que hay del eje a un punto donde estaría concentrada toda la superficie de la figura.-

Ejemplo:

En un rectángulo el radio de giro sería:

$$i_x = \sqrt{\frac{bh^3/12}{b \times h}} = \sqrt{\frac{h^2}{12}} = \frac{h}{\sqrt{12}}$$

El teorema de Steiner nos decía:

$$\frac{I_{xx}}{S} = \frac{I_{gg}}{S} + \frac{\cancel{S} \times d^2}{\cancel{S}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{i_A^2 = i_Y^2 + d^2}$$

EXPRESIÓN DEL TEOREMA DE STEINER APLICADO AL RADIO DE GIRO.