PROBLEMAS RESUELTOS

SERIE Nº 8 .- CENTRO DE MASA , MOMENTO DE INERCIA

Problema 1

En los vértices de una estructura metálica cuadrada de 1,0 m de lado y masa despreciable se hallan situadas cuatro esferas macizas y homogéneas de masas m_1 = 10,0 kg, m_2 = 20,0 kg, m_3 = 30,0 kg y m_4 = 40,0 kg, tal como se indica en la figura. A la vista de los datos anteriores, hacer primero una estimación aproximada de la posición del c.d.m. y proceder, a continuación, a su cálculo.

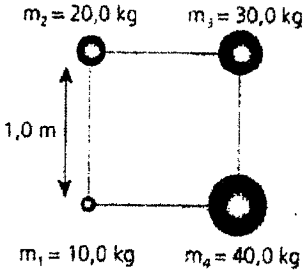


Fig 4.4

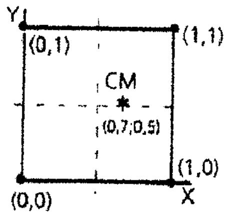


Fig. 4.5

Si las cuatro masas fueran iguales, el c.d.m. coincidiría con el centro geométrico de la estructura cuadrada; pero dado que no es así, el c.d.m. estará tanto más cerca de un vértice cuanto mayor sea la masa depositada en él. Así, la mitad derecha acumula más masa que la izquierda, mientras que la superior y la inferior acumulan la misma masa; por tanto, cabe esperar que el c.d.m. esté situado sobre el eje horizontal de simetría del cuadrado y desplazado hacia la derecha.

El cálculo preciso del c.d.m. supone elegir, previamente, un sistema de ejes y definir a continuación las coordenadas. La figura adjunta recoge la elección del sistema de ejes y las posiciones, respecto de él, de los diferentes vértices.

Aplicando ahora las fórmulas de las coordenadas del c.d.m., resulta:

$$X_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{4} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{4} m_i} =$$

$$= \frac{10,0 \cdot 0 + 20,0 \cdot 0 + 30,0 \cdot 1 + 40,0 \cdot 1}{10,0 + 20,0 + 30,0 + 40,0} =$$

$$= \frac{70,0}{100,0} = 0,7 \text{ m}$$

$$Y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{4} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{4} m_i} =$$

$$= \frac{10,0 \cdot 0 + 20,0 \cdot 1 + 30,0 \cdot 1 + 40,0 \cdot 0}{10,0 + 20,0 + 30,0 + 40,0} =$$

$$= \frac{50,0}{100,0} = 0,5 \text{ m}$$

Problema 2

Un sistema de dos partículas está dispuesto en un instante dado según las posiciones que se indican en la figura adjunta. Sabiendo que sus masas respectivas valen m_1 = 2,0 kg y m_2 = 3,0 kg y sus velocidades $\vec{v}_1 = 6,0\,\vec{i}\,(ms^{-1})$ y $\vec{v}_2 = -4,0\,\vec{j}\,(ms^{-1})$, calcular el momento angular total del sistema respecto del punto O en el referido instante.

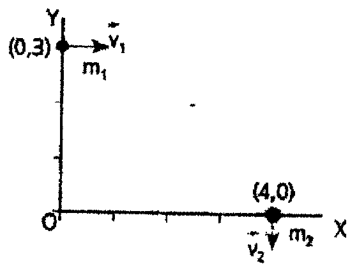


Fig. 4.9

De acuerdo con su definición,

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2$$

donde

$$\vec{r}_1 = 3\vec{j} \qquad \vec{r}_2 = 4\vec{i}$$

$$\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1 = 2,0 \cdot 6,0\,\vec{i} = 12,0\,\vec{i}$$

$$\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2 = 3,0 \cdot (-4,0)\,\vec{j} = -12,0\,\vec{j}$$

Operando con los anteriores vectores, se tiene:

$$\vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 0 \\ 12,0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -36,0\,\vec{k}$$

$$\vec{L}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & -12,0 & 0 \end{vmatrix} = -48,0\,\vec{k}$$

Luego,

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = -84,0\,\vec{k}$$

Problema 3.-

Una varilla homogénea de 2,0 kg de masa posee un radio de giro en torno a un eje que pasa por su centro geométrico igual a K = 0,50 m. Calcular el momento de inercia de la varilla respecto de otro eje paralelo al anterior que dista de él, 0,30 metros.

Si la varilla es homogénea su centro geométrico coincidirá con su centro de masas; por tanto, el momento de inercia que puede calcularse a través del radio de giro es el I_{CM}.

La aplicación posterior del teorema de Steiner permitirá, por tanto, resolver el problema. En efecto:

$$K = \sqrt{\frac{I}{m}}, \quad I = m\,K^2 = 2{,}0 \times 0{,}50^2 = 0{,}50 \text{ kg m}^2$$

Por otra parte,

$$I = I_{CM} + md^2 = 0{,}5 + 2{,}0 \times 0{,}30^2 = 0{,}68 \text{ kg m}^2$$

Problema 4.-

Un disco circular homogéneo de 1,0 kg de masa y 0,40 m de diámetro gira libremente alrededor de un eje perpendicular que pasa por su centro geométrico con una velocidad angular de 60 r.p.m. En una pequeña cavidad situada a 0,10 m de distancia del centro se deposita, en un momento dado, una pequeña bola de plomo de 0,40 kg de masa. Calcular la nueva velocidad angular del conjunto.

En ausencia de fuerzas exteriores, el producto $I\omega$ se mantiene constante, es decir, $I_1\,\omega_1 = I_2\,\omega_2$. Por tanto, como el disco gira libremente se podrá aplicar la conservación de $I\omega$, y se tendrá:

$$\omega_2 = \frac{I_1\,\omega_1}{I_2}$$

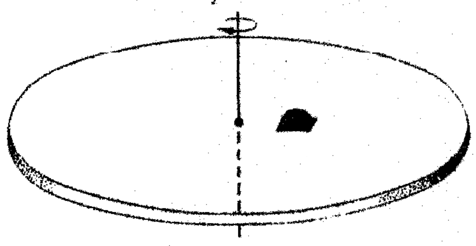


Fig. 5.13

Considerando la pequeña esfera como una masa puntual, su momento de inercia I' vendrá dado por $I' = m'r^2$. $I_1 = \frac{1}{2}mR^2$, pues se trata de un disco homogéneo, e $I_2 = I_1 + I' = \frac{1}{2}mR^2 + m'r^2$. Luego sustituyendo, resulta:

$$I_1 = \frac{1}{2}\,5{,}0 \times 0{,}20 = 2{,}0 \times 10^{-2} \text{ kg m}^2$$

$$I' = m'r^2 = 0{,}40 \times 0{,}1^2 = 4{,}0 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

$$I_2 = I_1 + I = 24{,}0 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

La velocidad angular ω_1 en el instante inicial, expresada en unidades SI, es

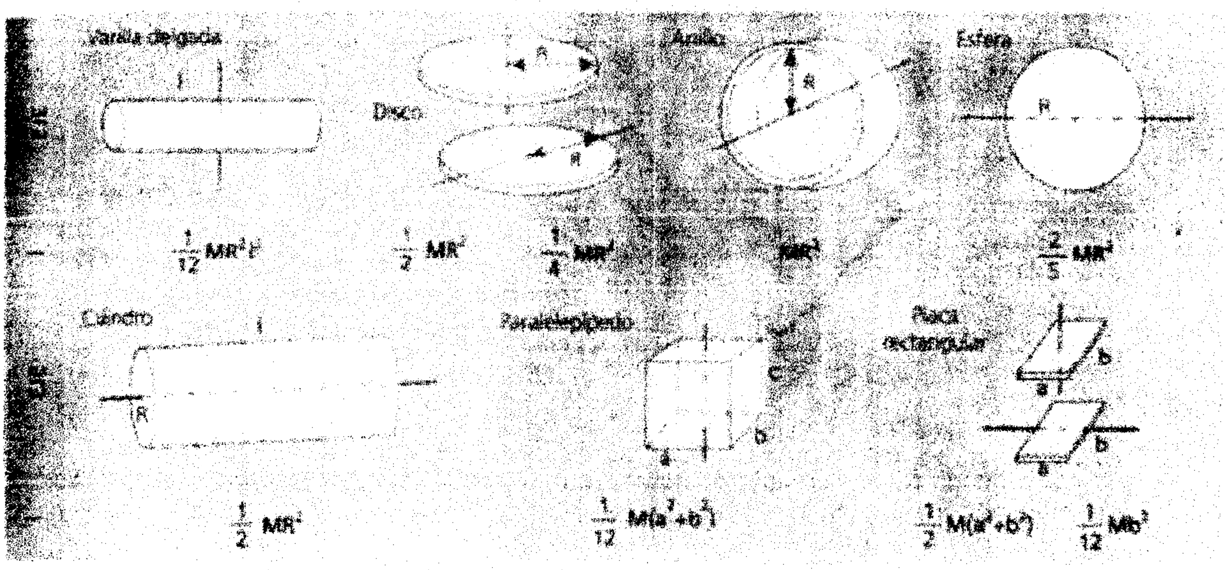
$$\omega_1 = 60 \text{ r.p.m.} = \frac{60 \cdot 2\pi}{60} = 2\pi \text{ rad s}^{-1}$$

Luego sustituyendo en la expresión de ω_2, resulta:

$$\omega_2 = \frac{2{,}0 \times 10^{-2} \times 2\pi}{24 \times 10^{-3}} = 1{,}67\,\pi \text{ rad}$$

El aumento de masa ha llevado consigo un aumento de I y una disminución de ω.

MOMENTOS DE INERCIA DE ALGUNOS CUERPOS



- CUERPO RÍGIDO -

La aplicación de las leyes fundamentales de la dinámica de rotación a la resolución de problemas cubre un amplio rango de situaciones físicas. No obstante lo cual, un buen número de ellas pueden ser incluidas en alguna de las tres categorías siguientes:

a) ***Problemas de cuerpos rígidos que sólo rotan.***

b) ***Problemas de cuerpos rígidos que rotan y se trasladan.***

c) ***Problemas de sistemas formados por varios cuerpos rígidos, de los cuales unos rotan y otros se trasladan.***

A continuación presentaremos una colección de problemas resueltos en los cuales la anterior categorización se hará explícita.

a) Problemas de cuerpos rígidos que sólo rotan

En esta categoría de problemas el procedimiento de resolución pasa por explotar la información contenida en la ecuación fundamental escrita, ya sea en la forma $M = I\alpha$ o $M = dL/dt$, teniendo, no obstante, en cuenta que cada una de estas ecuaciones, en apariencia simples, ocultan un buen número de relaciones entre conceptos complejos.

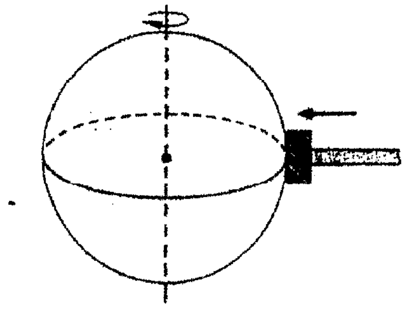
1. Una esfera de 1,0 m de diámetro y 10,0 kg de masa puede rotar libremente en torno a uno de sus ejes principales. En un instante en el que la velocidad de rotación es de 100 rad s-1 se le somete a la acción de una zapata aplicada sobre el ecuador de la esfera que genera una fuerza de fricción de 2,0 N. Calcular:

a) El tiempo que tardará la esfera en detenerse.

b) El número de vueltas que dará en ese tiempo.

a) Se trata de un típico problema en el que, a partir de un análisis dinámico —en términos de fuerzas y de momentos— hay que encontrar valores de variables cinemáticas, como el tiempo, el espacio o la velocidad. En tales casos, y tras una comprensión imprescindible de la situación física descrita en el enunciado, es necesario operar sobre las ecuaciones fundamentales convenientemente «desmenuzadas». Así, en el presente problema se considerará

$$\vec{M} = I\,\vec{\alpha}$$



pero el vector $\vec{M}$ es, en este caso, un momento de frenado asociado a una fuerza de rozamiento que es tangente a la esfera y, por tanto, perpendicular al radio R y está, además, aplicada sobre el ecuador. Ello permite escribir la expresión escalar del momento $M = F_{ROZ} \cdot R \cdot \operatorname{sen}\theta$ en la forma $M = F_{ROZ} \cdot R$. La aceleración resulta, como en la dinámica de la traslación, la magnitud que hace de puente entre la descripción dinámica y la descripción cinemática. Por tanto, despejando α de la primera ecuación, y sustituyendo, se tiene:

$$\alpha = \frac{M}{I} = \frac{F_{ROZ} \cdot R}{I} = \frac{F_{ROZ} \cdot R}{(2/5)\,mR^2} = \frac{5F_{ROZ}}{2\,mR} =$$
$$= \frac{5 \times 2{,}0}{2 \times 10{,}0 \times 0{,}5} = 1{,}0 \text{ rad s}^{-2}$$

Es sabido que para un movimiento circular uniformemente acelerado se cumple

$$\omega = \omega_o - \alpha\, t;\; t = \frac{\omega - \omega_o}{-\alpha}$$

Dado que en el estado final $\omega = 0$, sustituyendo resulta:

$$t = \frac{0 - 100}{-1{,}0} = 100 \text{ s}$$

b) La relación entre ángulo φ y número de vueltas N en un movimiento circular viene dada por

$$N = \frac{\varphi}{2\pi}$$

Dado que el movimiento es uniformemente decelerado:

$$\varphi = \varphi_o t - \frac{1}{2}\alpha t^2 = 100 \cdot 100 -$$
$$- \frac{1}{2}\, 1{,}0 \cdot 100^2 = 5 \times 10^3 \text{ rad}$$

$$N = \frac{5}{2\pi} \times 10^3 \text{ rad}$$

b) Problemas de cuerpos rígidos que rotan y se trasladan

En la resolución de este tipo de problemas puede procederse, mediante la aplicación de una expresión generalizada de la segunda ley de Newton, en la forma

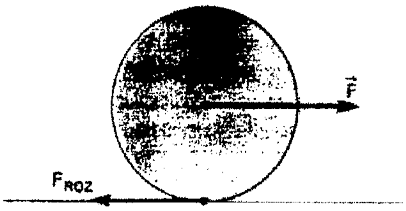
$$F = ma + I\frac{a}{R}$$

que puede interpretarse como que la fuerza F se «invierte» en comunicar al cuerpo una aceleración de traslación (término ma) y en dotarlo, además, de una aceleración de rotación (término Iα/R)

En el caso sencillo de la dinámica del movimiento de rodadura de un disco la justificación de la anterior ecuación es como sigue. Dado que el cuerpo rota y, además, se traslada será necesario aplicar las dos ecuaciones fundamentales $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ *y* $\Sigma\vec{M} = I\vec{\alpha}$, *que en su forma escalar se convierten en*

$$F - F_{ROZ} = m\,a \qquad [5.35]$$

$$M_{ROZ} = I\,\alpha \qquad [5.36]$$



El hecho de que en la segunda ecuación sólo aparezca el momento M_{ROZ} *de la fuerza de rozamiento* F_{ROZ} *y no de la fuerza tractora F es debido a que al estar ésta aplicada sobre el punto del eje, que se toma como origen de momentos, da lugar a un momento nulo.*

Recordando que $\vec{R}$ *y* $\vec{F}_{ROZ}$ *son perpendiculares* $|\vec{R} \times \vec{F}_{ROZ}| = R\ F_{ROZ}$ *y, por tanto,* $|\vec{M}_{ROZ}| = M_{ROZ} = R\ F_{ROZ}$; *es decir,*

$$M_{ROZ} = R\ F_{ROZ} = I\ \alpha$$

Despejando de aquí F_{ROZ} *y sustituyendo en la ecuación de las fuerzas, se tiene:*

$$F - \frac{I\alpha}{R} = m\,a$$

es decir,

$$F = ma + \frac{I\alpha}{R}$$

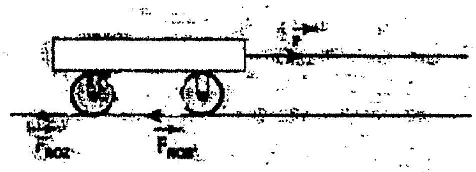
Otra de las características generales de este tipo de problemas consiste en que al ser el movimiento de avance o traslación un desarrollo del movimiento de rotación, se cumplen las relaciones $v = \omega \cdot R$ *y* $a = \alpha R$. *De modo que la anterior expresión puede escribirse como*

$$F = ma + \frac{Ia}{R^2} = \left(m + \frac{I}{R^2}\right)a \qquad [5.37]$$

2. Un carrito está compuesto por una plataforma de 2,00 kg de masa y cuatro ruedas de 6,0 cm de radio y 150 g de masa cada una. Calcular la aceleración del carrito cuando se aplica sobre él una fuerza tractora de 0,6 N. ¿Cuál será su velocidad lineal al cabo de 5 segundos de iniciado el movimiento? ¿Y la velocidad angular de sus ruedas?

Dado el carácter aditivo tanto de las masas como de los momentos de inercia, la ecuación 5.37 puede extenderse a casos como el planteado en el enunciado del presente problema, en donde hay varias masas y varios cuerpos rodantes afectados por el movimiento. En tales casos, m será la masa total e I el momento de inercia total. Por tanto, $m = m_p + 4\ m_R = 2{,}0 \times 4 \times 0{,}100 = 2{,}60$ kg, siendo m_p la masa de la plataforma y m_R la de las ruedas. Por otra parte, considerando las ruedas como discos, se tiene:

$$I = \sum_{i=1}^{4} I_i = 4 \times \frac{1}{2} m_R R^2 = 2\ m_R R^2$$



Despejando a en la ecuación 5.37 y sustituyendo, resulta:

$$a = \frac{F}{m + I/R^2} = \frac{F}{m + 2m_R\,R^2/R^2} = \frac{F}{m + 2\,m_R}$$

$$a = \frac{0{,}6}{2{,}90} = 0{,}21\ \mathrm{ms}^{-2}$$

Teniendo en cuenta que se trata de un movimiento de aceleración constante que parte del reposo, la velocidad final al cabo de 5 segundos será

$$v = at = 0{,}21 \times 5 = 1{,}05\ \mathrm{ms}^{-1}$$

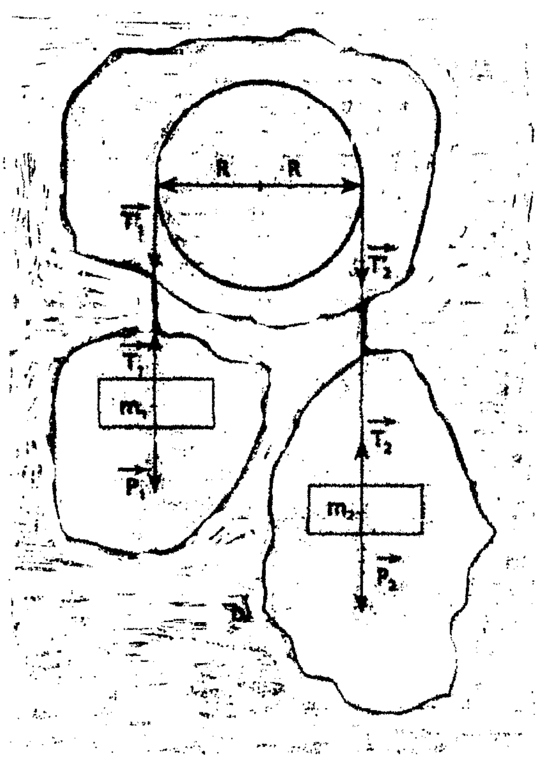
Y puesto que el movimiento de avance es el desarrollo del de rotación de las ruedas, la velocidad angular de ellas en ese mismo instante será

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{1{,}05}{6{,}0\ a\ 10^{-2}} = 17{,}5\ \mathrm{rad\ s}^{-1}$$

c) Problemas de sistemas formados por varios cuerpos rígidos de los cuales unos rotan y otros se trasladan

En tales casos el procedimiento pasa por aplicar el algoritmo de resolución de problemas de dinámica, aislando mentalmente cada cuerpo componente del sistema y aplicando las ecuaciones que proceda en cada caso.

3. Determinar la expresión literal de la aceleración a con la que se desplazan cualquiera de los dos cuerpos colgantes en una máquina de Atwood, suponiendo la masa de la polea no despreciable. Efectuar un análisis comparativo con la expresión que resulta cuando se considera la masa de la polea despreciable.



Aplicar lo anterior al siguiente caso numérico: $m_{polea} = 2{,}0$ kg; $m_1 = 10{,}0$ kg; $m_2 = 20{,}0$ kg; $g = 9{,}8$ ms^{-2} (considérese la polea como un disco a efectos de momentos de inercia).

Aislando sucesivamente cada uno de los tres cuerpos de que consta el sistema, y aplicando en cada caso la ecuación fundamental que proceda, se tiene:

a) *Cuerpo de masa m_1* (sólo se traslada):

$$T_1 - P_1 = m_1\,a$$
$$T_1 = m_1\,a + P_1 = m_1\,(a + g)$$

b) *Cuerpo de masa m_2* (sólo se traslada):

$$P_2 - T_2 = m_2\,a$$
$$T_2 = m_2\,(g - a)$$

c) *Polea* (sólo rota):

Recordando la ecuación general

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r} \times \vec{F} = I\,\alpha$$

se tiene:

$$T_2' \cdot R - T_1'\,R = I\,\alpha$$

ya que los vectores correspondientes a cada una de las tensiones tienen igual dirección y la aplicación de la regla del tornillo indica que sus sentidos son opuestos.

Dado que $\vec{T_2'} = -\vec{T_2}$ y que $\vec{T_1'} = -\vec{T_1}$, pues se trata de fuerzas interiores, y que, por tanto, $T_2' = T_2$ y $T_1' = T_1$ y la anterior ecuación escalar, puede escribirse en la forma

$$(T_2 - T_1)R = I\,\alpha$$

Sustituyendo los valores de T_2 y T_1, se tiene:

$$[m_2\,(g - a) - m_1\,(g + a)]\,R = I\,\alpha$$

Dado que el movimiento de traslación de los cuerpos m_1 y m_2 es el desarrollo del movimiento de rotación de la polea, se cumple la relación $a = \alpha \cdot R$, luego

$$[m_2\,(g - a) - m_1\,(g + a)]R = I\,\frac{a}{R}$$

es decir,

$$m_2\,g - m_2\,a - m_1\,g - m_1\,a = I\,\frac{a}{R^2}$$

Agrupando términos semejantes y despejando a, resulta:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}}\,g$$

ya que el momento de inercia de la polea puede considerarse como el de un disco $I = \frac{1}{2}\,mR^2$.

Cuando se compara la anterior ecuación con la obtenida considerando despreciable la masa de la polea,

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\,g$$

se advierte la presencia de m/2 en el denominador, lo que hace que la aceleración *a* sea más pequeña. La inercia a la rotación introducida por la presencia de una polea de masa no despreciable reduce, por tanto, la aceleración del sistema y hace que las tensiones T_1 y T_2 sean diferentes.

En el caso numérico planteado en el enunciado, se tendrá

$$a = \frac{20{,}0 - 10{,}0}{20{,}0 + 10{,}0 + \frac{2{,}0}{2}} \times 9{,}8 = \frac{10}{31} \times 9{,}8 = 3{,}2\ \mathrm{ms}^{-2}$$

para la primera situación, frente a

$$a = \frac{20{,}0 - 10{,}0}{20{,}0 + 10{,}0} \times 9{,}8 = 3{,}3\ \mathrm{ms}^{-2}$$

para la segunda.

Un yoyó está formado por dos discos de 6 cm de diámetro y 0,5 cm de espesor unidos por un cilindro de 2 cm de diámetro y de 1 cm de espesor, todos ellos centrados en torno al mismo eje. Sobre el cilindro se arrolla un hilo de 1,5 m de longitud y de masa despreciable y, a continuación, se suelta el yoyó. Calcular la velocidad que alcanzaría el sistema cuando haya descendido 1,00 m sabiendo que la masa de cada disco es de 50 g y la del cilindro interior de 2 g

Dado que entran en juego en el enunciado velocidades y alturas, se deberá aplicar la conservación de la energía total habida cuenta de que la fuerza peso es conservativa.

En el instante inicial el sistema sólo posee energía potencial gravitatoria, $E_p = m g h$; en el instante final, y tomando la posición correspondiente como origen de alturas, sólo poseerá energía cinética tanto de rotación como de traslación. Por tanto,

$$m g h = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

Dado que el movimiento de caída es el desarrollo del de rotación del yoyó, $v = \omega R_1$, siendo R_1 el radio del cilindro sobre el que está enrollado el hilo. Por tanto,

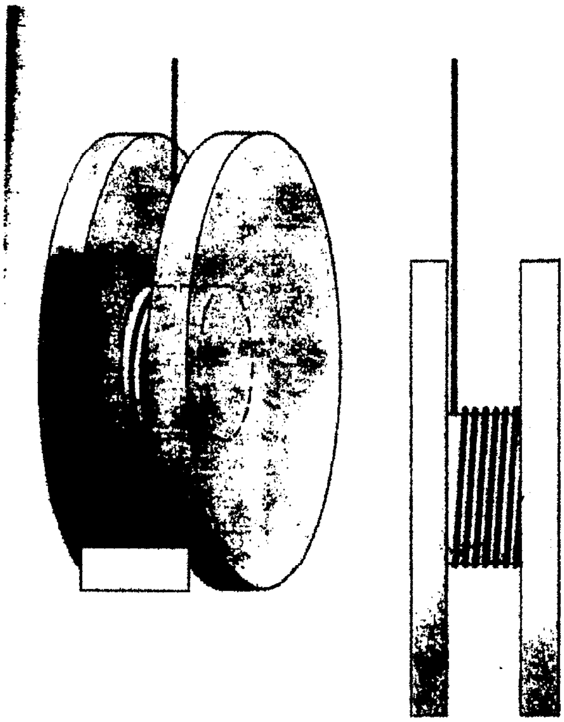
$$m g h = \frac{1}{2} v^2 \left(m + \frac{I}{R_1^2}\right) ; \; v = \sqrt{\frac{2 m g h}{m + I/R_1^2}}$$

La masa m es la masa del yoyó completo: $m = m_1 + 2m_2 = 2 + 2 \times 50 = 102 \text{ g} = 1{,}02 \times 10^{-1}$ kg, y el momento de inercia total será $I = I_1 + 2I_2$, es decir,

$$I = \frac{1}{2} m_1R_1^2 + 2 \frac{1}{2} m_2R_2^2 = \frac{1}{2}\, 2 \times 10^{-3} \times (1{,}0 \times 10^{-2})^2 + 50 \times 10^{-3} (3 \times 10^{-2})^2 = 1{,}51 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2$$

Sustituyendo finalmente en la expresión de v, resulta:

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 1{,}02 \times 10^{-1} \times 9{,}8 \times 1{,}00}{1{,}02 \times 10^{-1} + 1{,}51 \times 10^{-5}/(1{,}0 \times 10^{-2})^2}} = 2{,}8 \text{ ms}^{-1}$$



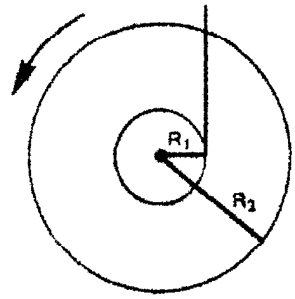


Fig 5.15

Tabla 5.2. Correspondencia entre la dinámica de traslación y la de rotación

	Traslación	Rotación		Traslación	Rotación
Magnitudes	Posición $\vec{r}$	Ángulo $\vec{\varphi}$	Ecuaciones	$\vec{F} = m\,\vec{a}$	$\vec{M} = I\,\vec{\alpha}$
	Velocidad $\vec{v}$	Velocidad angular $\vec{\omega}$		$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
	Masa m	Momento de inercia $I = \Sigma\, m_i r_i^2$			
	Fuerza $\vec{F}$	Momento de la fuerza $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$		$\vec{p} = m\,\vec{v}$	$\vec{L} = I\,\vec{\omega}$
	Momento lineal $\vec{p}$	Momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$		$E_c = \frac{1}{2} m v^2$	$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2$