PROBLEMAS RESUELTOS

SERIE Nº 2 - ESTÁTICA

Problema 1.-

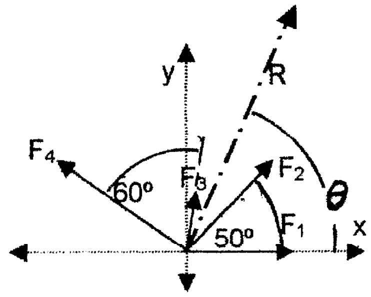
Cuatro fuerzas coplanares de 30 N, 40 N 20 N y 50 N están actuando concurrentemente sobre un cuerpo . Los ángulos entre las fuerzas son consecutivamente: 50º, 30º y 60º. Calcular la intensidad de la fuerza resultante y el ángulo que forma con la fuerza de 30 N.

Solución:

Primeramente realizamos el diagrama de las fuerzas, haciendo coincidir el eje de las abcisas con la dirección de la fuerza de 30 N

La intensidad resultante se obtiene en función de sus componentes

$$R_x = \Sigma F_x = F_1.\cos 0^o + F_2.\cos 50^o + F_3.\cos 80^o + F_4.\cos 140^o =$$
$$= 30N.1 + 40N.0{,}64 + 20N.0{,}17 + 50N.(-0{,}77) = 20{,}5N$$



$$R_y = \Sigma F_y = F_1.sen 0^o + F_2.sen 50^o + F_3.sen 80^o + F_4.sen 140^o =$$
$$= 30N.0 + 40N.0{,}77 + 20N.0{,}98 + 50N.0{,}64 = 82{,}4N$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(20{,}5N)^2 + (82{,}4N)^2} = 84{,}9N$$

Llamando θ al ángulo quer forma la resultante con el eje x, y con F_1 ,,

$$tg\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{82{,}4}{20{,}5} = 4{,}0195 \Rightarrow \theta = 76^o 01' 45''$$

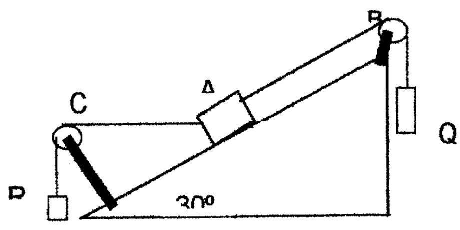
Problema 2.-

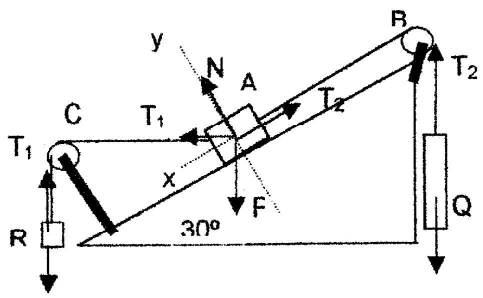
a) Calcular el peso P que necesita tener un cuerpo A para sostener en equilibrio el sistema mostrado en la figura 2 en la cual R pesa 50 kgr y Q pesa 100 kgr

El plano y las poleas son lisas. La cuerda AC es horizontal y la cuerda AB es paralela al plano inclinado.

b) Calcular la reacción del plano inclinado sobre el cuerpo.

Solución





en el cuerpo que cuelga de la polea C :

T_1 -R = 0 , luego: T_1 = R = 50 kgr (1)

en el cuerpo que cuelga de la polea B:

T_2 - Q = 0 por lo que T_2 = Q = 100 kgr(2)

en el cuerpo que está sobre el plano: T_1.cos 30º + P.sen 30º -T_2 = 0 (3)

Despejando el valor de $P = \frac{T_2 - T_1 \cos 30^o}{sen 30^o} = \frac{100kgr - 50kgr.\cos 30^o}{sen 30^o} = 113{,}40kgr$

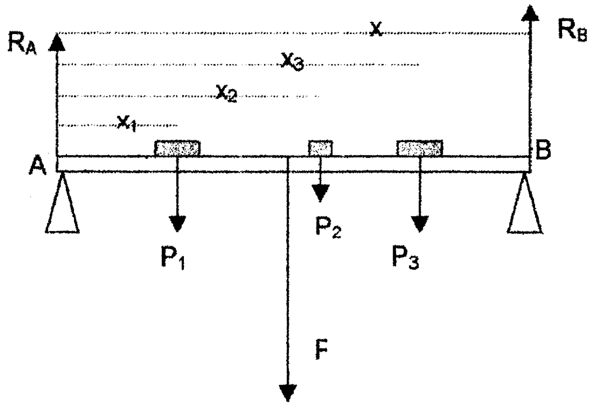
b) La reacción del plano sobre el cuerpo se denomina normal y siendo:

$$\Sigma F_Y = N - P.\cos 30° + T_1.sen30° = 0$$

$$\Rightarrow N = P.\cos 30° - T_1.sen30° = 113{,}40kgr.0{,}867 - 50kgr.0{,}5 = 73{,}32kgr$$

Problema 3.-
Un puente de 100 m de largo y 10.000 kgr de peso, se mantiene en posición horizontal mediante dos apoyos situados en sus extremos. Calcular las reacciones sobre los apoyos cuando hay tres vehículos sobre el puente, a 30 m, 60 m y 80 m de uno de sus extremos, y cuyos pesos son respectivamente: 1.500 kgr, 100 kgr y 1.200 kgr.

Solución:
Para que el sistema se halle en equilibrio estático, es necesario que el momento total respecto de cualquier punto sea nulo. Por lo tanto se puede hallar el momento respecto a cada uno de los extremos y calcular las reacciones.
De acuerdo al diagrama y la convención de signos:



Con respecto al extremo A:

$$\Sigma M_A = -P_1.x_1 - P_2.x_2 - P_3.x_3 + P.\frac{x}{2} + R_B.x + R_A.0 = 0$$

$$\therefore R_B = \frac{1.500kgr.30m + 100kgr.60m + 1200kgr.80m + 10.000kgr.50m}{100m} = 6470kgr$$

Con respecto al extremo B:

$$\Sigma M_B = P_1.(x - x_1) + P_2.(x - x_2) + P_3.(x - x_3) + P.\frac{x}{2} - R_A.x + R_B.0 = 0$$

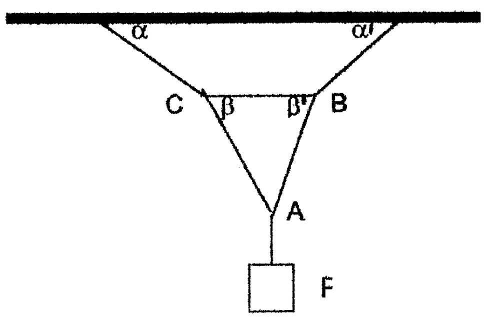
$$\therefore R_A = \left(\frac{1500.70 + 100.40 + 1200.20 + 10000.50}{100}\right)\frac{kgr.m}{m} = 6330kgr$$

Además se cumple:

$$\Sigma F_y = R_A + R_B - P_1 - P_2 - P_3 - P = 0$$

$$6330kgr + 6470kgr - 1500kgr - 100kgr - 1200kgr - 10000kgr = 0$$

Problema 4.-
Calcular la tensión en cada cuerda de la figura, si el peso suspendido es de 1000 kgr;
$\alpha = \alpha' = 37°; \beta = \beta' = 55°$

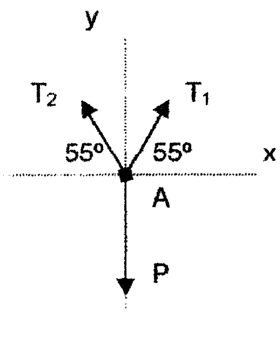


Solución:

Considerando el punto A:

Cómo en el mismo están en equilibrio las tensiones de las cuerdas T_1 y T_2 con el peso P:

$$\begin{cases} T_1.\cos\beta - T_2.\cos\beta = 0 \rightarrow (1) \\ T_1.sen\beta - T_2.sen\beta - P = 0 \rightarrow (2) \end{cases}$$

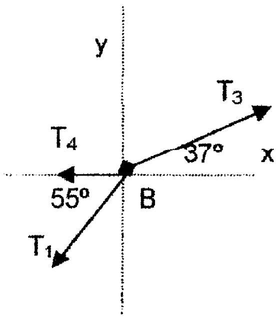


de (1) se deduce:

$$T_1.\cos\beta = T_2.\cos\beta \Rightarrow T_1 = T_2$$

de (2) se deduce:

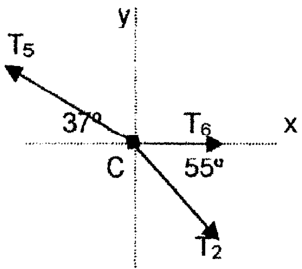
$$2.T_1.sen\beta = P \Rightarrow T_1 = \frac{P}{2.sen\beta} = \frac{1000kgr}{2.sen55^\circ} = 610,39kgr$$



Considerando el punto B:

Cómo en el mismo están en equilibrio las tensiones de las cuerdas T_3 y T_4 con T_1

$$\sum F_x = T_3.\cos\alpha - T_4 - T_1.\cos\beta = 0 \rightarrow (3)$$
$$\sum F_y = T_3.sen\alpha - T_1.sen\beta = 0 \rightarrow (4)$$



De (4) se deduce:

$$T_3 = \frac{T_1.sen\beta}{sen\alpha} = 610,39kgr.\frac{sen55^\circ}{sen37^\circ} = 830,82kgr$$

De (3) se obtiene:

$$T_4 = T_3.\cos\alpha - T_1.\cos\beta = 830,82kgr.\cos37^\circ - 610,39kgr.\cos55^\circ = 313,42kgr$$

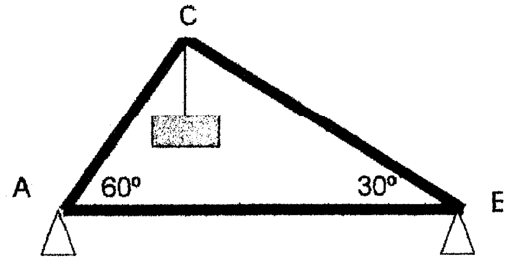
Por simetría entre B y C, planteando las ecuaciones de equilibrio entre las fuerzas T_5, T_6 y T_2 concurrentes en el punto C, se obtiene:

$T_5 = T_3 = 830{,}32$ kgr

$T_6 = T_4 = 313{,}42$ kgr

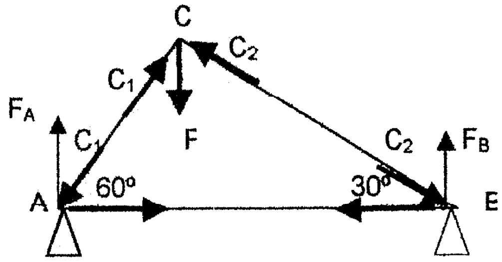
Problema 5.-

En el punto C de unión de dos barras AC y BC de la armadura metálica de la figura formando ángulos de 60° y 30° respectivamente, con el plano horizontal sobre el que se apoyan sus pies, está aplicada una carga de 100 kgr. Dichos pies se hallan unidos por medio del tirante AB. Calcular las fuerzas de compresión en cada barra, el esfuerzo a que se encuentra sometido el tirante y las fuerzas hacia abajo sobre los soportes. El peso de la armadura se supone despreciable.



Solución:

Haciendo el diagrama de fuerzas y de acuerdo con las condiciones de equilibrio, en el punto C se cumple:



$$\begin{cases} \sum F_x = C_1.\cos60^\circ - C_2.\cos30^\circ = 0 \\ \sum F_y = C_1.sen60^\circ + C_2.sen30^\circ - P = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1.\cos60^\circ - C_2.\cos30^\circ = 0 \\ C_1.sen60^\circ + C_2.sen30^\circ = 100 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene: $C_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & -\cos 30° \\ 100 & sen 30° \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos 60° & -\cos 30° \\ sen 60° & sen 30° \end{vmatrix}} = \dfrac{0-(-86{,}6)}{1} = 86{,}6kgr$

$$C_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} \cos 60° & 0 \\ sen 30° & 100 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos 60° & -\cos 30° \\ sen 60° & sen 30° \end{vmatrix}} = \dfrac{50-0}{1} = 50kgr$$

En el punto A:

$F_A = C_1$. sen 60° = 86,60 kgr . cos 30° = 75 kgr

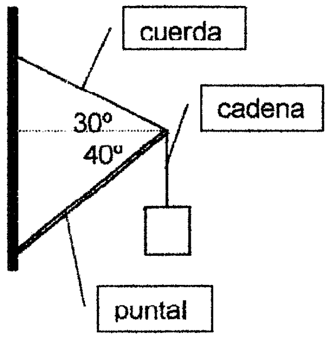
C = C_1. cos 60° = 86,60 kgr . cos 60° = 43,30 kgr

En el punto B:

$F_B = C_2$. sen 30° = 50 kgr . 0,5 = 25 gkr

C = C_2 . cos 30° = 50 kgr . 0,866 = 43,30 kgr

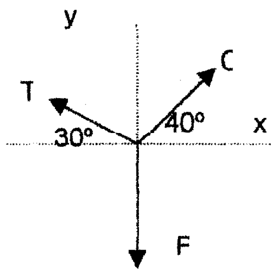
Problema 6.-
Calcular el máximo peso que puede soportar la estructura de la figura, si la máxima tensión que puede resistir la cuerda es de 1000 kgr y la máxima compresión que soporta el puntal es de 2000kgr. La cadena vertical es capaz de resistir cualquier carga.



Solución:

considerando el diagrama de fuerzas y las condiciones de equilibrio:

$$\Sigma F_x = C.\cos 40° - T.\cos 30° = 0 \rightarrow (1)$$
$$\Sigma F_y = C.sen 40° + T.sen 30° - P = 0 \rightarrow (2)$$



Si se consideran los valores máximos de tensión y de compresión, el sistema no se hallará en equilibrio. Por lo tanto utilizaremos el valor máximo de uno de ellos y veremos si el otro es inferior al máximo permitido. Tomaremos entonces C = 2000 y calcularemos T, con (1).

$$T = \frac{C.\cos 40°}{\cos 30°} = \frac{2000kgr.\cos 40°}{\cos 30°} = 1769{,}10kgr$$

valor que supera el máximo posible para T y no podemos aceptar, porque así se rompe la cuerda.
Considerando el máximo de T = 1000 kgr y calculando el valor de C correspondiente se obtiene:
$C = \dfrac{T.\cos 30°}{\cos 40°} = \dfrac{1000kgr.\cos 30°}{\cos 40°} = 1130{,}51kgr$ valor aceptable ya que es menor que el máximo que puede soportar el puntal.
Con estos valores calculamos el valor del peso máximo P.
De (2) se obtiene:

P = C. sen 40° +T .sen 30° = 1130,51 kgr. sen 40° + 1000 kgr .sen 30° = 1226,67 kgr

Problema 7.-
a) Calcular el momento resultante, con respecto al origen O, de las fuerzas:

$\vec{F}_1 = 500\vec{i}; \vec{F}_2 = -200\vec{j} + 100\vec{k}; \vec{F}_3 = -100\vec{i} + 50\vec{j} - 400\vec{k}$

Considerar que cada una de las fuerzas es aplicada en el punto (4,-3,15).

b) Demostrar que el momento resultante es perpendicular a la fuerza resultante.

Solución:

Calculemos primero la fuerza resultante.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (500\vec{i}) + (-200\vec{j} + 100\vec{k}) + (-100\vec{i} + 50\vec{j} - 400\vec{k})$$

$$\vec{R} = 400\vec{i} - 150\vec{j} - 300\vec{k}$$

El vector posición $\vec{r} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 15\vec{k}$

El momento respecto al origen será:

$$\vec{M}_{(R,O)} = \vec{r} \wedge \vec{R} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 15 \\ 400 & -150 & -300 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}[900 - (-2250)] - \vec{j}(-1200 - 400) + \vec{k}[-600 - (-1200)] = 3150\vec{i} + 7200\vec{j} + 600\vec{k}$$

b) Si dos vectores son perpendiculares, su producto escalar es nulo. Por lo tanto paras demostrar que el momento resultante es perpendicular a la fuerza resultante, calculamos $\vec{R} \bullet \vec{M}_{(R,O)}$

$$\vec{R} \bullet \vec{M}_{(R,O)} = R_x \bullet M_x + R_y \bullet M_y + R_z \bullet M_z = 400.3150 + (-150).7200 + (-300).600 = 0$$

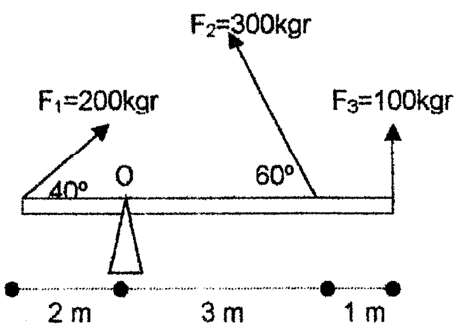
Como $\vec{R} \bullet \vec{M}_{(R,O)} = 0$ es $\vec{R} \perp \vec{M}_{(R,O)}$

Problema 8.-

La barra de la figura puede girar alrededor de un eje que pasa por O.

a) Calcular el momento de cada fuerza y el momento resultante respecto del eje, considerando positivos los momentos que tienden a producir rotaciones en sentido contrario a las agujas de un reloj.

b) Encontrar la intensidad y el sentido de la fuerza que ha de ejercerse en el extremo derecho, perpendicular a la barra, para mantener el equilibrio.



Solución:

a) $M_{(F1,O)} = -\ r_1.F_1.\text{sen}40º = -2\text{ m}.\ 200\text{ kgr}.\text{sen}40º = -257{,}115\text{ mkgr}$

$M_{(F2,O)} = r_2.F_2.\text{sen}60º = +3\text{ m}\ .\ 300\text{ kgr}\ .\ \text{sen}60º = +779{,}423\text{ m.kgr}$

$M_{(F3,O)} = r_3.F_3.\text{sen}90º = +4\text{ m}\ .\ 100\text{ kgr}\ .\ 1 = +400\text{ mkgr}$

El momento torsor resultante será la suma de los momentos de cada fuerza.

-257,115 mkgr +779,423 mkgr +400 mkgr = 922,307 mkgr

b) Para que se halle en equilibrio hay que aplicar un momento de igual intensidad y sentido contrario, es decir hay que aplicar una fuerza perpendicular a la barra en el extremo derecho, a 4 m del eje que produzca un momento de valor -922,307 mkgr :

$M = r \,.\, F \,.\, \text{sen}90°$ por lo tanto $F = \dfrac{M}{r} = \dfrac{-922{,}307\,mkgr}{4\,m} = -230{,}576$ kgr

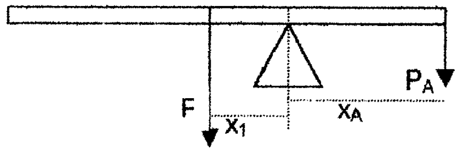
La fuerza requerida tendrá una intensidad de 230,576 kgr y sentido hacia abajo

Problema 9.-

Para hallar el peso y el centro de gravedad de una pesada barra gruesa de 1,60 m de longitud, dos hombre A de 80 kgr y B de 60 kgr , realizan la siguiente experiencia. Apoyan la barra por uno de sus puntos intermedios permaneciendo A sobre uno de sus extremos, la barra se mantiene horizontal estando el apoyo situado a 0,75 de él. Después se coloca B sobre el mismo extremo y para que la barra continúe horizontal, el apoyo tiene que estar a 0,80 m de B. Calcular: a) el peso de la barra. b) la posición de su centro de gravedad.

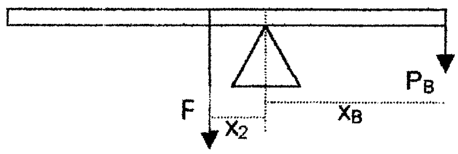
Solución:

Esquematicemos las dos situaciones:
Ubicado A en el extremo:



$P_A \,.\, x_A = P \,.\, x_1$ (1)

Ubicado B en el mismo extremo:
$P_B \,.\, x_B = P \,.\, x_2$ (2)



Restando m.am. (1) y (2) se tiene:

$P_A \,.\, x_A - P_B \,.\, x_B = P \,.\, (x_1 - x_2)$ luego :

$$P = \frac{P_A \,.\, x_A - P_B \,.\, x_B}{x_1 - x_2} = \frac{80\text{ kgr} \,.\, 0{,}75\text{ m} - 60\text{ kgr} \,.\, 0{,}80\text{ m}}{0{,}05\text{ m}} = 240\text{ kgr}$$

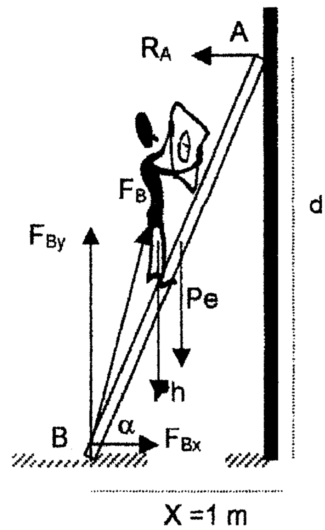
de (1) $x_1 = \dfrac{P_A \,.\, x_A}{P} = \dfrac{80\text{ kgr} \,.\, 0{,}75\text{ m}}{240\text{ kgr}} = 0{,}25$ m

La posición del centro de gravedad de la barra, medida desde el extremo donde se colocaron los hombres es:

$$x = x_2 + x_B = 0{,}25\text{ m} + 0{,}75\text{ m} = 1{,}00\text{ m}$$

Problema 10.-

Una escalera de 4 m de largo se apoya contra una pared vertical sin rozamiento, estando su extremo inferior a 1 m de la pared. La escalera pesa 80 kgr y su centro de gravedad está en su punto medio. Un hombre de 100 kgr se encuentra parado a un tercio de su parte inferior. Encontrar la magnitud y dirección de la fuerza ejercida sobre el extremo inferior de la escalera.



Solución:

Llamando F_{Bx} a la fuerza de fricción con el piso que evita que la escalera resbale.

F_{By} y R_A serán las reacciones normales del piso y la pared respectivamente.

$$\cos\alpha = \frac{x}{L} = \frac{1m}{4m} = 0{,}25 \Rightarrow \alpha = 75°31'21''$$

Considerando el diagrama de fuerzas y las condiciones de equilibrio, tenemos:

$$\begin{cases} \Sigma F_x = F_{Bx} - R_A = 0 \rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ \Sigma F_y = F_{By} - Ph - Pe = 0 \rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \\ \Sigma M_{(B)} = F_{By}.0 - F_{Bx}.0 + R_A.4m.sen\alpha - Pe.2m.sen(90°-\alpha) - Ph.\frac{4}{3}m.sen(90°-\alpha) = 0 \rightarrow (3) \end{cases}$$

De (2) se obtiene F_{By} = Ph+Pe = 100 kgr + 80 kgr = 180 kgr

De (3) se halla $R_A = \dfrac{Pe.2m.sen(90°-\alpha) + Ph.0{,}75m.sen(90°-\alpha)}{4m.sen\,\alpha} =$

$$= \frac{80\,kgr.\,2m.sen(14°28'39'') + 100\,kgr.0{,}75m.sen(14°28'39'')}{4m.sen75°31'21''} = \frac{58{,}75\,kgr}{3{,}87} = 15{,}169\,kgr$$

De (1) $F_{Bx} = R_A$ = 15,169 kgr entonces:

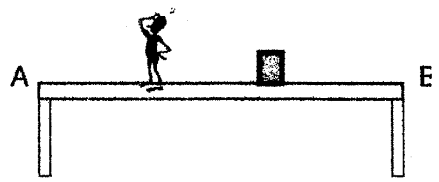
$$F_B = \sqrt{F_{Bx}^2 + F_{By}^2} = \sqrt{(15{,}169kgr)^2 + (180kgr)^2} = 180{,}63kgr$$

Y el ángulo que forma F_B con la horizontal será:

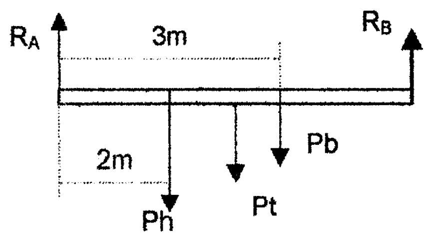
$$\theta = arctg\frac{F_{By}}{F_{Bx}} = \frac{180}{15{,}169} = 85°10'58{,}5''$$

Problema 11.-

La figura representa un tablón de 5 m de longitud, apoyado sobre columnas en sus extremos A y B. Un obrero se halla a 2 m del extremo izquierdo siendo su peso de 80 kgr. Si a 3 m de éste mismo extremo se encuentra un bloque de cemento de 50 kgr. Calcule las reacciones de las columnas. El peso del tablón es de 60 kgr.



Solución:



Como el sistema está en equilibrio será:

$$\Sigma\vec{F} = 0 \quad \text{y} \quad \Sigma\vec{M} = 0$$

Utilizando el esquema correspondiente y utilizando como centro de momentos el punto A tenemos:

$$\Sigma M_A = R_A.0 + R_B.5m - Ph.2m - Pt.2{,}5m - Pb.3m = 0$$

$$R_B = \frac{Ph.2m + Pt.2{,}5m + Pb.3m}{5m} = \frac{80kgr.2m + 60kgr.2{,}5m + 50kgr.3m}{5m} = 92kgr$$

$$\Sigma\vec{F} = R_A + R_B - Ph - Pt - Pb = 0 \Rightarrow R_A = Ph + Pt + Pb - R_A = (80 + 60 + 50 - 92)kgr = 98kgr$$