TEORÍA DE ERRORES

El error en las mediciones – Su clasificación

La medición de toda magnitud está afectada por un error. Pero error no significa equivocación, sino una indeterminación debido a factores que hacen imposible lograr valores exactos.

Los errores de medición se clasifican en:

⌦ errores sistemáticos: debidos a fallas del método, de los instrumentos o del observador. Se caracterizan por ser iguales y del mismo signo, del mismo sentido, por lo que son constantes o siguen una ley que puede definirse, y en consecuencia, son corregibles y se deben corregir.

Ejemplos: fallas del instrumental o limitaciones en los aparatos de medida (graduación equivocada, errores de cero, limbo medio descentrado), hipótesis equivocada (leyes de péndulo ideal aplicadas a péndulo físico), método de medida, y la acción simultánea de las causas antes citadas.

⌦ errores casuales o experimentales: son errores debidos a causas fortuitas, esto es, al azar. Son casuales y variables y es imposible predecir su valor y signo. Son los responsables de que de una serie de medidas, en iguales condiciones, de una misma magnitud, no se obtengan valores iguales. Estos errores están comprendidos dentro de los límites de aproximación de los instrumentos de medida. Es a estos errores a los que se aplica la Teoría de errores.

La Teoría de errores estudia el desarrollo matemático al que deben someterse los distintos resultados de las mediciones de una magnitud para obtener el valor más aceptable de la misma y los límites entre los cuales se hallará el error cometido. Para ello, se aplica el cálculo de las probabilidades a un conjunto de mediciones de la misma magnitud obtenidas en las mismas condiciones: el mismo observador, utilizando el mismo instrumento y aplicando el mismo método de medición.

Las ciencias de la Naturaleza, entre ellas la Física, establecen leyes cuantitativas que rigen los fenómenos, basadas en el método experimental fundado por Galileo Galilei, sustentado en las observaciones de los fenómenos. Estas leyes se expresan mediante relaciones numéricas, para lo cual es necesario medir magnitudes.

Medir una cantidad A es compararla con otra cantidad de la misma magnitud a la que se denomina unidad, por lo cual, la unidad o patrón de medida debe definirse en forma muy precisa. Medir una magnitud física es asociar a ésta un valor dimensionado en relación a la unidad que arbitrariamente se ha definido para medirla.

El resultado de una medición se expresa por un número y una unidad. Para su valor numérico necesitamos tres factores o sistemas:

⌦ Sistema objeto: es lo que se mide.

⌦ Sistema medición: es el procedimiento o método usado para medir.

⌦ Sistema de comparación o de referencia: definido como unidad y el instrumento de medida correspondiente.

En consecuencia, el resultado de la medición depende de estos tres sistemas y de los factores personales del observador (habilidad, defectos ópticos, etc.). Lo importante es que cada proceso define una magnitud física.

No tiene sentido hablar del valor verdadero de una magnitud. En el proceso de medición se busca encontrar el valor representativo de la cantidad medida, valor que estará afectado de una incertidumbre que necesariamente debe darse conjuntamente con el valor obtenido, ya sea aproximadamente o en términos de probabilidades.

No existen instrumentos que permitan medir sin error alguno una magnitud física. Un instrumento es preciso si repite siempre el mismo error sistemático y es exacto si los errores sistemáticos son pequeños.

El proceso de medición

Sistemas que intervienen en el proceso de medición

La Física es una ciencia experimental. Esto significa que los fenómenos en análisis deben observarse y medirse. Toda observación en Física debe ser comprobable experimentalmente

El proceso de medición es un proceso físico, una operación física experimental, en la que intervienen necesariamente estos sistemas:

⌦ Sistema objeto: compuesto por el objeto que se quiere medir (lo que se quiere medir)

⌦ Sistema medición: formado por el equipo o aparato de medición y la teoría sobre la que se fundamenta su funcionamiento.

⌦ Sistema de referencia o de comparación: la unidad empleada, con su definición y su patrón.

⌦ Operador: ineludible participante del proceso, responsable de decidir si se han cumplido los criterios de operación para poder tomar las lecturas en la escala del instrumento.

Estos sistemas deben influir unos sobre otros, por lo cual, debe existir una interacción entre ellos.

Ejemplo: se quiere medir la longitud de una pieza con un calibre de apreciación 0,1 mm, de manera que:

- ✓ sistema objeto: longitud de la pieza.
- ✓ sistema medición: calibre y teoría sobre la cual fue construido.
- ✓ sistema de referencia o de comparación: metro patrón.
- ✓ operador: decide sobre el cumplimiento de los criterios para efectuar mediciones: que la pieza esté apoyada de manera que su longitud sea paralela al eje longitudinal del calibre, que la presión sobre la pieza no resulte excesiva, que las superficies de la pieza y el calibre se encuentren limpias, que la iluminación de la escala del calibre sea correcta, que su posición, como operador con respecto a la escala, no provoque errores de paralaje (errores debidos a las posiciones relativas entre el operador, el objeto y la escala).

Sistemas que intervienen en el proceso de medición

Cada proceso de medición define lo que se llama una magnitud física. Las magnitudes físicas están unívocamente determinadas por el proceso de medición. No hay otra forma de definir una magnitud física más que por el proceso de medición (su descripción). El concepto primario es el proceso de medición y no la magnitud física.

Ejemplo: a) medir una pieza con un calibre de apreciación 0,1 mm.
b) medir la misma pieza con una regla de plástico de apreciación 1mm.

Tanto el proceso a) como el proceso b) definen una magnitud, la longitud, y son equivalentes.

Operación de medir una cantidad

El resultado de un proceso de medición es una cantidad, también llamada valor de la magnitud. Medir una cantidad A es compararla con otra cantidad U de la misma magnitud, a la que se denomina unidad y que es elegida arbitrariamente por el operador. La comparación se lleva a cabo mediante un proceso que varía de acuerdo con la magnitud en cuestión. Simbólicamente, la comparación se indica con el cociente $\frac{A}{U}$. El resultado de este cociente representa la cantidad de veces que la cantidad A contiene a la unidad U, y es un número real abstracto llamado medida de la cantidad A con la unidad U.

$$\frac{A}{U} = x \quad \rightarrow \quad \text{donde } x \in R \text{ (abstracto)}$$

El valor de la cantidad es $A = x.U$

Cantidad A: número real concreto — Medida — Unidad

Ejemplo: $A = 100$ m , $U = 1$ m pero $x = \frac{A}{U} = \frac{100\text{m}}{1\text{m}} = 100$

Por lo tanto $A = x.U \rightarrow 100\text{m} = 100.1\text{m} \Rightarrow A = 100\text{ m} \in R$ (concreto) y $x = 100 \in R$ (abstracto)

Entonces, ¿qué es una magnitud? Debe trabajarse de manera que la operación de medir sea consistente consigo misma, es decir, que cada vez que se mide la misma cantidad en las mismas condiciones los resultados se reproduzcan, dentro de ciertos límites. Para lograrlo, es necesario definir el proceso de interacción entre los tres sistemas y el operador, con los criterios correspondientes.

Definición operacional de una magnitud: **la descripción del proceso de medir cantidades de una cierta magnitud constituye la definición misma de esa magnitud**.

Apreciación de un instrumento

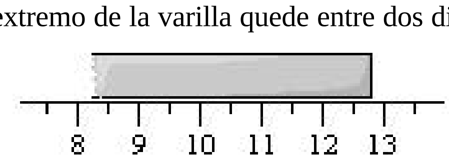
Es la menor división de la escala del instrumento.

Ejemplos: a) una regla cuya menor división es 1 cm, tiene una apreciación $\Delta x = 1$ cm
b) la apreciación de un cronómetro graduado en 1/5 segundo es $\Delta x = 0,2$ seg

Estimación de una lectura

Es el menor intervalo que un operador puede estimar con la ayuda de la escala.

Ejemplo: Un observado trata de medir la longitud de una varilla con una regla cuya apreciación es $\Delta x = 1$ mm. Haciendo concordar lo mejor que puede el origen de la regla con el origen de la varilla, buscará cuál división de la regla coincide con el extremo de la varilla. Lo más frecuente es que no coincida ninguna y que el extremo de la varilla quede entre dos divisiones de la regla:

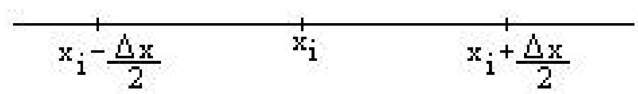


Puede observarse que la longitud de la varilla no es ni 12 mm ni 13 mm. El observador trata de expresar esta situación escribiendo una cifra más que no es leída sino estimada por él “a ojo”. En el caso de la figura 12,8 mm. Con esta regla, el observador se siente capaz de distinguir entre 12,7 mm ; 12,8 mm y 12,9 mm , eligiendo como mejor lectura 12,8 mm. Entonces, la estimación de las lecturas de ese observador con esa regla y en esas condiciones es 0,1 mm. Otras veces, bastante frecuentes, la estimación del operador coincide con la apreciación del instrumento. A una u otra se las expresa indistintamente como Δx. De esta manera **la estimación de la lectura depende principalmente de la apreciación del instrumento y de la habilidad del operador**.

Expresión de una lectura

Al medir una cantidad A cuya medida es x, el observador realiza la operación de medir, y leyendo la escala, obtiene la lectura x_i con una apreciación Δx. Esto significa que el instrumento da la información x_i una vez cumplidos los requisitos para estar en condiciones de leer la escala.

La apreciación o estimación Δx significa que la información dada por la escala está acompañada de un <u>intervalo de incerteza</u> cuya longitud es $2\frac{\Delta x}{2}$, esto es, que el aparato de medición informa que la medida pertenece al intervalo $\left(x_i - \frac{\Delta x}{2}; x_i + \frac{\Delta x}{2}\right)$ es decir $x_i - \frac{\Delta x}{2} \langle\ x\ \langle\ x_i + \frac{\Delta x}{2}$. Gráficamente:



de manera que $X = x_i + \frac{\Delta x}{2}$. Si, a continuación, el observador repite la operación de medir, la información que brinda el aparato es que el valor x_{i+1} de la cantidad que se está midiendo pertenece al intervalo $\left(x_{i+1} - \frac{\Delta x}{2}; x_{i+1} + \frac{\Delta x}{2}\right)$ es decir $x_{i+1} - \frac{\Delta x}{2} \langle\ x\ \langle\ x_{i+1} + \frac{\Delta x}{2}$. Puede ocurrir que los intervalos mencionados no coincidan ni tengan ningún punto en común.

Concluyendo, la expresión final de una medición debe constar de la lectura y de la apreciación del instrumento que determina la longitud del intervalo de incerteza asociado a la medición:

$$A = x_i \pm \Delta x$$

donde x_i es la lectura y Δx es la apreciación.

<u>Los errores casuales</u>

Introducción

La siguiente pregunta es la que hay que responder: ¿cómo es posible que al medir varias veces una misma cantidad los resultados no se repitan?

El bioquímico y el médico, cuando tratan de medir ciertas propiedades características de la sangre o de la orina, aceptan una sola medida ya que su interés se limita a saber si la proporción de éste o aquél componente se mantiene o no dentro de ciertos límites, o si está fuera de ellos.

El problema en un laboratorio de Física o de Química es diferente. Consiste en obtener el máximo rendimiento de los sistemas que intervienen en el proceso de medición. Una de las primeras sorpresas en el laboratorio de Física o Química es que al medir repetidas veces una cantidad los resultados no se repiten todos. Esta diversidad es <u>intrínseca</u> de la operación de medir con el mayor cuidado, tratando de obtener el máximo rendimiento del instrumento y del observador.

Así es que, si se toman varias medidas, ¿cuál es la verdadera?, tomando como punto de partida la hipótesis de que exista un “verdadero valor” de la cantidad que se quiere medir y que el proceso tiene por objeto determinar ese verdadero valor tan aproximadamente como sea posible.

En el laboratorio no interesa ese valor verdadero sino los <u>resultados</u> obtenidos que constituyen <u>información intercambiable</u>. Así que, el problema radica en encontrar un <u>procedimiento común</u> a todos los observadores para elaborar la información producida en el proceso de medición y <u>construir</u> así el <u>resultado de la medición</u>.

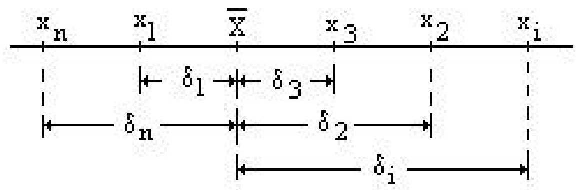
Promedio, varianza, error standard y error del promedio

El procedimiento consiste en recurrir a la Teoría Estadística. Según ésta, debe tomarse una muestra de la variable, en este caso una serie de mediciones del objeto a medir, y puede llegarse a obtener una probable cantidad y un probable intervalo de incerteza. La probable cantidad es el promedio aritmético de las mediciones, y como probable intervalo de incerteza, el promedio de los intervalos de incerteza.

Al realizar N medidas de una magnitud $x_1, x_2, x_3 ....., x_n$, se efectúa el promedio aritmético:

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{N} = \frac{1}{N}\left(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N}$$

Gráficamente, sucede en la escala del instrumento:



Cada una de las medidas se desvía cierta cantidad respecto al promedio. La diferencia $\left(\overline{X} - x_i\right)$ se llama **desviación de la medida x_i** o **error absoluto de una medida**:

$$\underline{\text{Error absoluto}}: \quad \varepsilon_a = \delta_i = \left(\overline{X} - x_i\right)$$

En el caso ideal, donde no existe error, las medidas $x_1, x_2, x_3 ....., x_n$ y el promedio $\overline{X}$ coincidirán y las desviaciones δ_i serán nulas. Hallando el promedio de las desviaciones de cada medida:

$$\overline{\delta} = \frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + ... + \delta_n}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{X} - x_i\right)}{N}$$

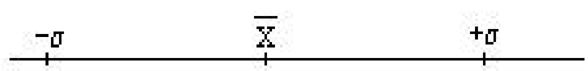
Esta sumatoria puede ser cero, aún cuando exista error promedio, ya que los δ_i pueden ser negativos y positivos y podrían anularse entre sí, indicando, por lo tanto una conclusión incorrecta. Para evitar este absurdo, se toman los cuadrados de las desviaciones y se obtiene el <u>promedio de las desviaciones cuadráticas</u>, también denominado **varianza**:

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{X} - x_i\right)^2}{N} = \frac{\left(\overline{X} - x_1\right)^2 + \left(\overline{X} - x_2\right)^2 + \left(\overline{X} - x_3\right)^2 + ... + \left(\overline{X} - x_n\right)^2}{N}$$

La unidad de la varianza es el cuadrado de la unidad de la cantidad que se mide. Entonces, para eliminar este inconveniente, se extrae la raíz cuadrada de la varianza. Esta raíz se llama **error standard** o **error medio cuadrático**:

$$\underline{\text{Error standard}}: \quad \sigma = \pm\sqrt{V} = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{X} - x_i\right)^2}{N}}$$

De esta manera, la unidad del error standard resulta la misma que la unidad de la cantidad que se mide. Expresa la <u>calidad del proceso de medición</u> y determina un intervalo de amplitud 2σ alrededor del promedio:



Este error es distinto de la apreciación del instrumento. Se define como intervalo de incerteza promedio al **error de los promedios**:

$$\underline{\text{Error de los promedios}}: \quad \xi = \frac{\pm\sigma}{\sqrt{N}}$$

Expresión de una medida

Deben considerarse tres cuestiones:

1) el promedio $\overline{X}$, correspondiente al valor que las mediciones efectuadas atribuyen a la cantidad medida.

2) el error standard de las lecturas σ, que establece una medida de la calidad del proceso de medición y del operador.

3) el error de los promedios ξ , con el cual se define el intervalo de incerteza asociado a la medición.

Entonces, el resultado de una medición es: $\quad x = \overline{X} \pm \Delta x$

Error relativo y porcentual de una medición

El **error relativo** se define como el cociente entre el valor absoluto del error standard y el promedio

$$\underline{\text{Error relativo}}: \quad \varepsilon_r = \frac{\Delta x}{\overline{X}}$$

Tiene las características de ser adimensional y de representar en forma intuitiva el concepto de desviación o error.

El **error porcentual** se define como el error relativo multiplicado por cien:

$$\text{Error porcentual: } \varepsilon_{\%} = \varepsilon_r.100$$

Sus características son dar información sobre la calidad de la medición totalmente independiente de la medida y no tener dimensiones.

Condición de mínimo del promedio aritmético

¿Por qué se elige el promedio aritmético como representante de la serie de mediciones? La respuesta es que éste hace mínima la suma cuadrática de las desviaciones de cada lectura respecto al promedio.

Puede demostrarse aplicando el procedimiento para calcular máximos y mínimos de una función. Debe satisfacer la condición de extremo, es decir, que la derivada primera de la sumatoria de las desviaciones cuadráticas respecto al promedio debe ser cero.

$$\sum_{i+1}^{m}\delta_i^2 = \sum_{i+1}^{m}\left(\overline{X}-x_i\right)^2 = \sum_{i+1}^{m}\left(\overline{X}^2 - 2\overline{X}x_i + x_i^2\right) = \sum_{i+1}^{m}\overline{X}^2 - \sum_{i+1}^{m}2\overline{X}x_i + \sum_{i+1}^{m}x_i^2$$

La derivada primera de esta sumatoria respecto de $\overline{X}$ debe ser igual a cero:

$$\frac{d\left(\sum\delta_i^2\right)}{d\overline{X}} = \frac{d\left(N\overline{X}^2 - 2\overline{X}\sum x_i + \sum x_i^2\right)}{d\overline{X}} = 2N\overline{X} - 2\sum x_i + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{X} = \frac{\sum x_i}{N}$$

donde éste es el valor que hace mínima la función desviación cuadrática y que coincide con la definición de promedio aritmético.

Concluyendo, el promedio aritmético es el valor que hace mínimas las desviaciones cuadráticas, por lo cual, es elegido como representante de N lecturas de una medida.

Frecuencia

Es el número de veces que se repite una lectura en una serie de mediciones. Una serie de lecturas $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots, x_n$ puede representarse en un cuadro en función de la frecuencia que permite calcular el promedio $\overline{X}$ y la varianza V, utilizando las siguientes fórmulas.

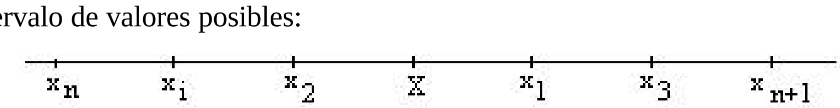
x_i	f_i	$x_i.f_i$	$\overline{X}-x_i$	$(\overline{X}-x_i)^2$	$(\overline{X}-x_i)^2.f_i$
x_1	f_1	$x_1.f_1$	$\overline{X}-x_1$	$(\overline{X}-x_1)^2$	$(\overline{X}-x_1)^2.f_1$
x_2	f_2	$x_2.f_2$	$\overline{X}-x_2$	$(\overline{X}-x_2)^2$	$(\overline{X}-x_2)^2.f_2$
x_3	f_3	$x_3.f_3$	$\overline{X}-x_3$	$(\overline{X}-x_3)^2$	$(\overline{X}-x_3)^2.f_3$
------------	------------	------------	------------	------------	------------
------------	------------	------------	------------	------------	------------
x_n	f_n	$x_n.f_n$	$\overline{X}-x_n$	$(\overline{X}-x_n)^2$	$(\overline{X}-x_n)^2.f_n$
	N	$\sum x_i.f_i$			$\sum\left(\overline{X}-x_i\right)^2.f_i$

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i.f_i}{N} \qquad\qquad V = \frac{\sum\left(\overline{X}-x_i\right)^2.f_i}{N}$$

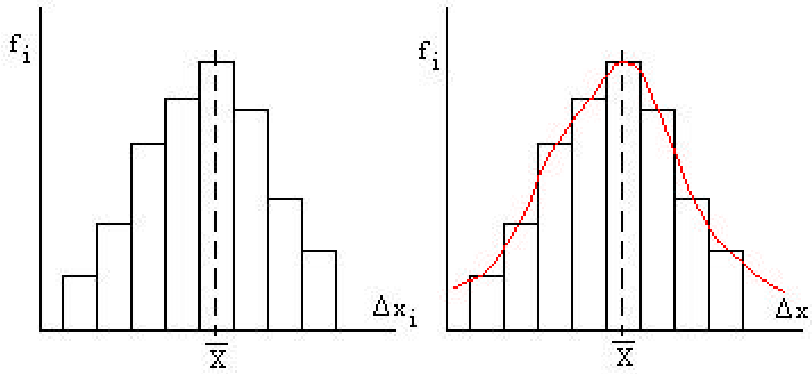
Luego, se calcula el error standard σ y el error de los promedios ξ .

Distribución de Gauss, histograma y polígono de frecuencias

Considerando nuevamente la serie de N mediciones $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots, x_n$, los valores estarán distribuidos alrededor del promedio $\overline{X}$. Si se realiza una medición (n+1), no podrá predecirse qué valor saldrá pero si puede decirse algo sobre la probabilidad de que dicho nuevo valor se encuentre en un determinado intervalo de valores posibles:



Los valores se aglomeran alrededor del promedio $\overline{X}$. Si en lugar de un eje se tomara dos ejes perpendiculares, y se grafica en abscisas los intervalos de clase que se obtienen dividiendo el eje X en pequeños intervalos iguales Δx_i en función de las frecuencias f_i , al unir los puntos medios de cada intervalo con su frecuencia correspondiente $\left(\frac{x_i}{2}; f_i\right)$ se obtiene el **polígono de frecuencias**.



Si la amplitud de los intervalos de clase tiende a cero y el número de mediciones N tiende a infinito, el polígono de frecuencias se transforma en una curva. La experiencia muestra que, en todos los casos, el histograma que se obtiene puede ser aproximado por una función continua bien definida y única, cuya forma es siempre la misma, dependiendo sólo de dos parámetros $\overline{X}$ y σ. Su ecuación es:

$$\varphi = \frac{dN}{dx} = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} = e^{-\frac{\left(\overline{X}-x_i\right)^2}{2\sigma}}$$

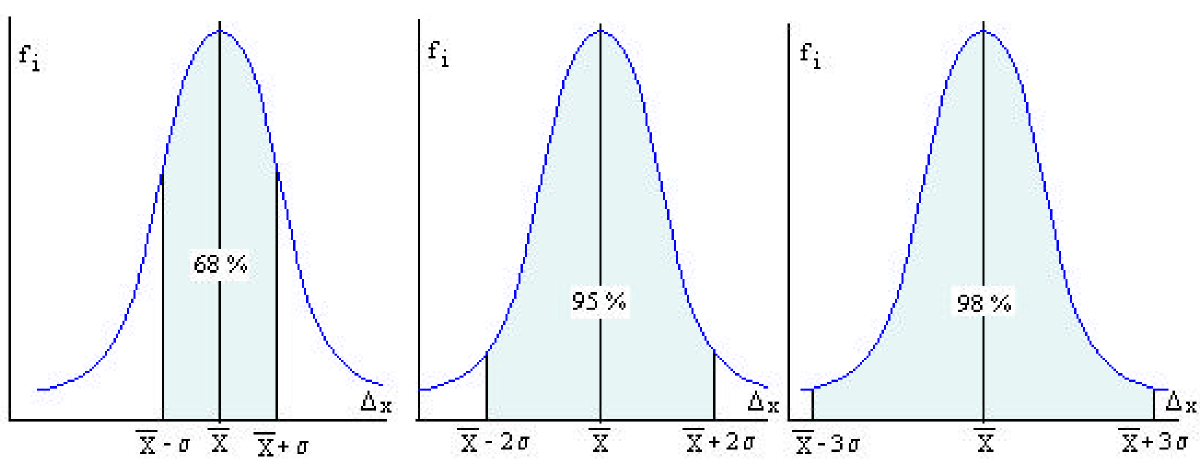
esta función representa la <u>densidad de observaciones</u> en un intervalo de clase determinado por la variable x_i . La representación de esta función se denomina **curva de distribución normal** y sus características son:

1) presenta un máximo en $x_i = \overline{X}$.
2) es simétrica respecto a dicho valor promedio.
3) presenta puntos de inflexión en $\left(\overline{X} \pm \sigma\right)$.
4) tiende a cero a medida que la variable se aleja del promedio $\overline{X}$.

Significado de la curva de distribución normal

Considerando intervalos alrededor de $\overline{X}$, se demuestra que el área bajo la curva de distribución normal representa la <u>probabilidad</u> de que una medición pertenezca a dicho intervalo según el siguiente comportamiento:

a) el 68 % de las mediciones pertenecen al intervalo $\left(\overline{X}-\sigma; \overline{X}+\sigma\right)$
b) el 95 % de las mediciones pertenecen al intervalo $\left(\overline{X}-2\sigma; \overline{X}+2\sigma\right)$
c) el 98 % de las mediciones pertenecen al intervalo $\left(\overline{X}-3\sigma; \overline{X}+3\sigma\right)$



El **error más probable** μ es el valor que determina el intervalo $\left(\overline{X} \pm \mu\right)$ al cual pertenece el 50 % de las mediciones. Se demuestra que $\mu = 0{,}6456 . \sigma = \frac{2}{3} . \sigma$.

Estas cantidades permiten efectuar controles en el trabajo experimental. Al realizar una serie de mediciones de una magnitud dada, es posible que en algunos casos aislados se cometa un error <u>no casual</u>, originado por un factor extraño (error de cálculo, mal funcionamiento del aparato de medición, equivocación personal, etc.). La distribución de Gauss permite el uso de un criterio físico para rechazar un dato sospechoso.

Se puede fijar para cada serie de mediciones un <u>límite de confianza</u> o <u>confidencia k</u>. Cualquier dato que no pertenezca al intervalo determinado por el límite de confidencia alrededor del promedio $\left(\overline{X} \pm k\right)$, debe ser rechazado.

No existe un criterio unívoco para determinar este límite, pero un método muy usado es el siguiente: **el porcentaje de mediciones que <u>no pertenezcan</u> al intervalo determinado por el límite de confianza debe ser mucho menor que 1/N , donde N es el número de lecturas**.

Resumen: Pasos a seguir en el laboratorio

Los pasos a seguir para la medición de un magnitud son los siguientes:

1) medir N veces una magnitud, obteniendo los valores $x_1, x_2, x_3 ....., x_n$, expresados en sus cifras significativas (determinadas por la apreciación del instrumento).

2) calcular el promedio, la varianza y el error standard.

3) fijar un límite de confidencia.

4) rechazar todos los datos que no pertenezcan al intervalo determinado por el límite de confidencia alrededor del promedio.

5) calcular, con los datos que hayan quedado, el promedio, la varianza y el error standard corregidos.

6) calcular el error de los promedios.

7) escribir el resultado de la medición $x = \overline{X} \pm \xi$ interpretándolo de manera que x es el valor más probable de la magnitud medida y la probabilidad de que el valor verdadero pertenezca al intervalo $\left(\overline{X} \pm \xi\right)$ es del 100 %.

Algunas veces resulta necesario un paso adicional:

8) comparar el histograma obtenido de los datos experimentales con la curva de distribución normal, utilizando los parámetros $\overline{X}$ y σ ya calculados, dando valores a la variable independiente x (en el exponente de la ecuación). Los gráficos obtenidos deben resultar semejantes.

Intervalos de Incerteza: Origen

Las incertezas que acompañan al valor de la cantidad medida tienen sus orígenes en:

a) la definición de la unidad de medida y, en el caso de las unidades fundamentales, en las imprecisiones originadas en la construcción del patrón que las materializa.

b) la determinación o definición de la cantidad a medir.

c) la apreciación del instrumento utilizado para medir.

d) el operador.

Debe tratarse que las mediciones resulten con incertezas originadas en las razones a) y b), despreciables en comparación con las originadas por c) y d).

Ejemplo: El metro patrón está definido con una precisión de 1 parte en 1000 millones, esto es 10^{-9}. Este es el orden de magnitud de la incerteza introducida en una medición de una longitud, por la definición y construcción del metro patrón, y se admite que esa incerteza es despreciable comparada con las introducidas por otros orígenes.

Los errores sistemáticos

Introducción

En la práctica pueden aparecer otras fuentes de incertezas, las llamadas **errores sistemáticos**, que pueden originarse en defectos de construcción o de calibración del aparato de medición, en métodos incorrectos de tomar las lecturas (errores de paralaje), etc.

En general, este tipo de incertezas es característico de cada montaje experimental, por lo que su eliminación requiere un cuidadoso estudio de las condiciones e hipótesis en que se basa la medición.

Intervalos de Incerteza

Una medida es tanto más significativa y valiosa cuanto menor es el intervalo de incerteza asociado a la medición. Esto se cumple cuando el operador logra controlar la aplicación de sus criterios de medición sobre el aparato que está utilizando.

Ejemplo: La apreciación de un aparato es 10^{-3} mm (0,001 mm), lo cual significa que el instrumento es capaz de medir una magnitud con una incerteza del orden de 10^{-3} mm. Pero, si las lecturas fluctúan en un intervalo de 10^{-2} mm (0,010 mm), significa que el operador, al manejar el equipo, introduce incertezas que parecen constituir un desaprovechamiento de las posibilidades del aparato.

Medidas directas e indirectas

Al medir la longitud de una tina con una regla se obtiene una medida directa. Medir la superficie de la tapa de un cuaderno comprende varios pasos: medir el largo y el ancho con una regla, obteniendo medidas de longitud, para luego efectuar el producto, obteniendo una medida de superficie, esto es, una medida indirecta.

De esta manera, una medida es **directa** si su valor se obtiene de un instrumento y es **indirecta** si su valor se logra por medio de operaciones aritméticas entre medidas directas. Esto significa que la medida indirecta se define en función de otras medidas.

Error absoluto

¿Cómo se comportan los errores en las medidas indirectas? El problema será: conocidas las ecuaciones a utilizar y la apreciación de cada cantidad que interviene en ella, ¿cuál es la apreciación de cada medida indirecta obtenida aplicando la ecuación?

A continuación, se resolverán algunos problemas como ejemplo:

a) <u>Cantidad suma de otras cantidades</u>

Sea A una cantidad que se quiere medir indirectamente, y las cantidades B y C de medición directa. Consideremos que $A = B + C$ es la función que las relaciona, y ΔB y ΔC son las apreciaciones conocidas de manera que $B \pm \Delta B$ y $C \pm \Delta C$. De estas definiciones anteriores resultan las siguientes desigualdades, en las cuales, B_i y C_i son dos lecturas cualesquiera:

$$\begin{array}{l} B_i - \Delta B \langle \ B \ \langle \ B_i + \Delta B \\ C_i - \Delta C \langle \ C \ \langle \ C_i + \Delta C \end{array} \quad \text{sumando miembro a miembro}$$

$$(B_i + C_i) - (\Delta B + \Delta C) \langle \ B + C \ \langle \ (B_i + C_i) + (\Delta B + \Delta C)$$

$$\text{Entonces} \quad A_i - (\Delta B + \Delta C) \langle \ A \ \langle \ A_i + (\Delta B + \Delta C)$$

$$\therefore \ \Delta A = \Delta B + \Delta C$$

Entonces, puede concluirse que **la apreciación de una lectura de una cantidad que es suma de otras cantidades es igual a la suma de las apreciaciones de éstas**. Simbólicamente:

$$\text{Si} \ A = B + C \ \Rightarrow \ \Delta A = \Delta B + \Delta C$$

b) <u>Cantidad producto de otras cantidades</u>

Sea A una cantidad que se quiere medir indirectamente, y las cantidades B y C de medición directa. Consideremos que $A = B.C$ es la función que las relaciona, y ΔB y ΔC son las apreciaciones conocidas de manera que $B \pm \Delta B$ y $C \pm \Delta C$. De estas definiciones anteriores resultan las siguientes desigualdades, en las cuales, B_i y C_i son dos lecturas cualesquiera:

$$\begin{array}{l} B_i - \Delta B \langle \ B \ \langle \ B_i + \Delta B \\ C_i - \Delta C \langle \ C \ \langle \ C_i + \Delta C \end{array} \quad \text{multiplicando miembro a miembro}$$

$$(B_i - \Delta B)(C_i - \Delta C) \langle \ B.C \ \langle \ (B_i + \Delta B)(C_i + \Delta C)$$

$$B_iC_i - B_i\Delta C - C_i\Delta B + \Delta B\Delta C \langle \ B.C \ \langle \ B_iC_i + B_i\Delta C + C_i\Delta B + \Delta B\Delta C$$

$$B_iC_i - (B_i\Delta C + C_i\Delta B) + \Delta B\Delta C \langle \ B.C \ \langle \ B_iC_i + (B_i\Delta C + C_i\Delta B) + \Delta B\Delta C$$

Dado que el término $\Delta B.\Delta C$ es despreciable en comparación con los demás términos, resulta:

$$A_i - (B_i\Delta C - C_i\Delta B) \langle \ A \ \langle \ A_i + (B_i\Delta C + C_i\Delta B)$$

$$\therefore \ \Delta A = B.\Delta C + C.\Delta B$$

Concluyendo, **la apreciación de una lectura de una cantidad que es producto de otras cantidades es igual a la suma de los productos de una lectura por la apreciación de la otra**. Simbólicamente: $\text{Si} \ A = B.C \ \Rightarrow \ \Delta A = B.\Delta C + C.\Delta B$

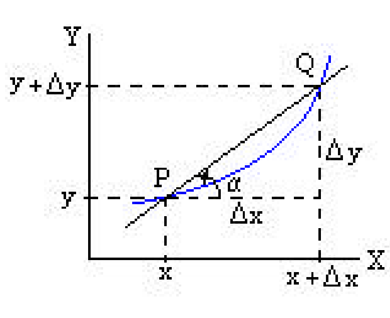
Ahora bien, ¿qué sucedería si hubiera que hallar el error de un cociente o de una magnitud donde alguna medida se obtuviera realizando sucesivas operaciones aritméticas?

<u>Ejemplo</u>: El período de un péndulo, cuya relación con su longitud es $T^2 = \dfrac{4.\pi^2.L}{g}$.

Las demostraciones anteriores pueden obtenerse recurriendo al concepto de <u>incremento de una función en un punto</u>:

Sea $y = f(x)$. El incremento de la función en un punto P es:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \ \text{donde} \ \Delta y = f'(x).\Delta x$$



El incremento Δx puede considerarse como la apreciación de la medida x y el incremento Δy como la apreciación que le corresponde por medio de la función $y = f(x)$.

Si la función es de dos variables $z = f(x, y)$, el incremento de la función se obtiene por medio de la siguiente expresión:

$$\Delta z = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}.\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.\Delta y$$

Generalizando, el incremento para una función de n variables $z = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_x)$ se obtiene por medio de:

$$\Delta z = \frac{\partial f(x_n)}{\partial x_1}.\Delta x_1 + \frac{\partial f(x_n)}{\partial x_2}.\Delta x_2 + \frac{\partial f(x_n)}{\partial x_3}.\Delta x_3 + ... + \frac{\partial f(x_n)}{\partial x_n}.\Delta x_n$$

Esta ecuación permite hallar el error absoluto de una expresión cualquiera utilizando las medidas directas.

Error relativo y porcentual

Dado que cada lectura está seguida por una franja de incertezas $x = \overline{X} \pm \Delta x$, dicha indeterminación se distribuye en la medida x calculando el cociente:

Error relativo: $\varepsilon_r = \dfrac{\Delta x}{x}$

Este cociente representa la incerteza que en la medición le corresponde a cada unidad y constituye una expresión de la calidad de cada lectura de esa medida con ese instrumento. Es la apreciación relativa de cada lectura o error relativo.

Puede expresarse en forma porcentual, multiplicando el error relativo por cien:

Error porcentual: $\varepsilon_{\%} = \varepsilon_r.100$

La apreciación relativa depende del valor de la cantidad medida.

Ejemplos: a) Apreciación relativa de un producto

$$\Delta A = C.\Delta B + B.\Delta C \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta A}{A} = C.\frac{\Delta B}{A} + B.\frac{\Delta C}{A} = \frac{C.\Delta B}{C.B} + \frac{B.\Delta C}{C.B} \quad \therefore \quad \frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta B}{B} + \frac{\Delta C}{B}$$

es decir, que **la apreciación relativa de una cantidad producto de otras cantidades es igual a la suma de las apreciaciones relativas de éstas**.

b) Apreciación relativa de un cociente

$$\text{Si } A = \frac{B}{C} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta B}{B} + \frac{\Delta C}{B}$$

concluyendo que **la apreciación relativa de un cociente es igual a la suma de las apreciaciones relativas de éstas**.

c) Se mide una longitud con una regla de apreciación 1 cm, obteniéndose una lectura de 10 cm. Entonces, los errores relativo y porcentual serán:

error relativo: $\varepsilon_r = \dfrac{\Delta x}{x} = \dfrac{1\,\text{cm}}{10\,\text{cm}} = 0{,}1$ error porcentual: $\varepsilon_{\%} = 0{,}1.100 = 10\%$

En este caso, cada centímetro de la longitud medida está afectado por una incerteza de 0,1 cm, o bien, la apreciación relativa es 10 %.

Sea la función $y = f(x_n)$, cuyo incremento es $\Delta y = \dfrac{\partial f(x_n)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dfrac{\partial f(x_n)}{\partial x_2}\Delta x_2 + .. + \dfrac{\partial f(x_n)}{\partial x_n}\Delta x_n$.

La mayor o menor contribución de los errores de $x_1, x_2, x_3 ....., x_n$ depende de los coeficientes $\dfrac{\partial f(x_n)}{\partial x_i}$, denominados **factores de propagación** de los errores Δx_1, Δx_2, ... , Δx_n . Estos factores de propagación pueden ser positivos o negativos, razón por la cual, el error máximo se obtendrá cuando todos los términos tengan el mismo signo:

$$\Delta y = \left|\frac{\partial f(x_n)}{\partial x_1}\Delta x_1\right| + \left|\frac{\partial f(x_n)}{\partial x_2}\Delta x_2\right| + ... + \left|\frac{\partial f(x_n)}{\partial x_n}\Delta x_n\right|$$

Así, la apreciación relativa será $\dfrac{\Delta y}{y} = \left(\dfrac{x_1}{y}\dfrac{\partial f(x_n)}{\partial x_1}\right)\Delta x_1 + \left(\dfrac{x_2}{y}\dfrac{\partial f(x_n)}{\partial x_2}\right)\Delta x_2 + .. + \left(\dfrac{x_n}{y}\dfrac{\partial f(x_n)}{\partial x_n}\right)\Delta x_n$,

donde los factores de propagación de los errores relativos son $\left(\dfrac{x_i}{y}\dfrac{\partial f(x_n)}{\partial x_i}\right)$.

Cuando todos los términos del desarrollo de la apreciación relativa son del mismo orden, los errores de las mediciones $x_1, x_2, x_3 ....., x_n$ contribuyen en proporciones más o menos equivalentes al error de y. Sin embargo, en algunos casos, los factores de propagación son de distinto orden de magnitud. En esta circunstancia, se dice que las variables con factor de propagación mayor deberán medirse con mayor cuidado, eligiendo convenientemente el método de medición y el instrumental. No tiene sentido medir con mucha precisión magnitudes que prácticamente no influyan en el error. Un estudio previo de los errores que influyen en la medida final permite tomar decisiones en cuanto al planeamiento de la experimentación.

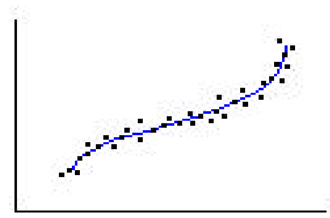
<u>Representaciones gráficas</u> – <u>Cuadrados mínimos</u>

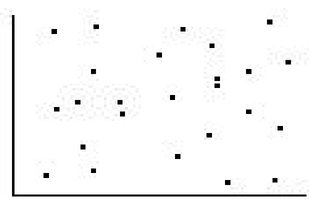
Introducción

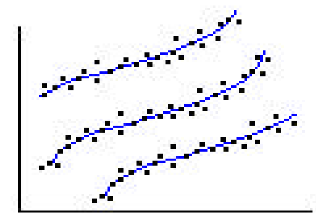
En un experimento realizado en el laboratorio, se han medido cantidades de dos magnitudes físicas X e Y, con el propósito de descubrir o verificar una ley física que las vincula. Como resultado de estas mediciones, se han obtenido N pares de valores (x_i , y_i) que, representados gráficamente, muestran un conjunto de puntos que sugieren la forma de una curva.

Como los datos son experimentales, no todos los puntos pertenecerán a la curva sugerida, pudiendo suceder alguna de estas situaciones:

1) que la mayoría de los puntos pertenezca a la curva sugerida
2) que los puntos estén tan dispersos que no exista posibilidad de dibujar la curva
3) que la dispersión sea tal que se puedan dibujar varias curvas

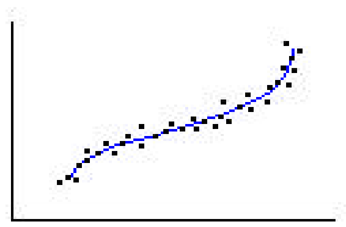

1)

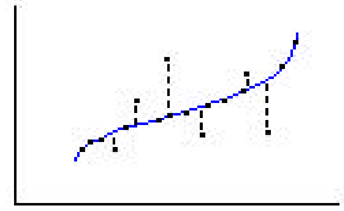

2)

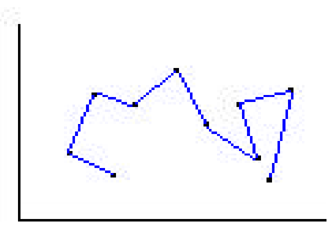

3)

Existen algunas pautas para la elección de la curva que represente la relación entre los puntos experimentales:

a) se dibuja la curva a la que pertenezcan la mayor cantidad de puntos experimentales
b) si los puntos están dispersos de tal manera que pueden obtenerse varias curvas, habrá que interpolar para lograr una sola
c) no deben unirse los puntos con una poligonal

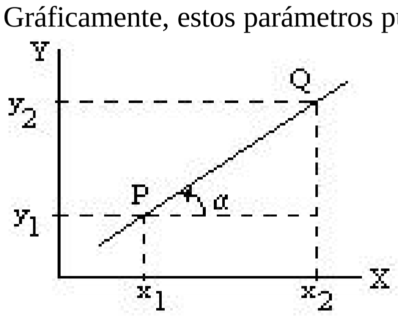

a)


b)


c)

Parámetros de una recta

Suponiendo que los puntos experimentales se encuentren visiblemente sobre una recta, la función correspondiente tendrá la forma $Y = aX + b$, donde a es la pendiente de la recta y b su ordenada al origen. Gráficamente, estos parámetros pueden obtenerse de la siguiente manera:



Eligiendo convenientemente dos puntos P y Q experimentales que pertenezcan a la recta:

$$a = \operatorname{tg}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

La ordenada al origen b es el punto de intersección de la recta con el eje Y.

Analíticamente, la obtención se estos parámetros se realiza aplicando la Teoría Estadística. Considerando que si el par ordenado de datos experimentales (x_i , y_i) pertenece a la recta $Y = aX + b$, deberá cumplirse que $y_i - a.x_i - b = 0$ para todo i . Pero como son mediciones de laboratorio, siempre surgirá una desviación d_i , de manera que $y_i - a.x_i - b \neq 0$ sino que $y_i - a.x_i - b = d_i$. Los valores de los parámetros que hacen mínima las desviaciones serán:

$$a = \frac{N\sum_i^m x_i y_i - \sum_i^m x_i \sum_i^m y_i}{N\sum_i^m x_i^2 - \left(\sum_i^m x_i\right)^2} \quad y \quad b = \frac{\sum_i^m x_i \sum_i^m y_i - \sum_i^m x_i \sum_i^m x_i y_i}{N\sum_i^m x_i^2 - \left(\sum_i^m x_i\right)^2}$$

<u>Bibliografía</u>

- **Introducción a las mediciones de laboratorio** - Maiztegui-Gleiser
- **trabajos prácticos de Física** - Fernández-Galloni
- **Mecánica elemental** - J. C. Roederer